УДК 515.125, 512.562

ПОРОЖДАЕМОСТЬ ТОПОЛОГИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА ОТНОШЕНИЯМИ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Пархонюк М. П., студент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Люксембург И. Л. – ассистент

Аннотация: В работе показано, что стандартная топология на $\mathbb{R}^n$ порождается отношением покоординатного частичного порядка. Исследовано усиление этого порядка и его влияние на порождаемую топологию. Установлено, что лексикографический порядок сильнее покоординатного и задаёт более сильную топологию. Также рассмотрен расширенный порядок, порождающий ту же топологию, что и покоординатный.

Ключевые слова: евклидово пространство, частичный порядок, порядковая топология, лексикографический порядок, сравнение топологий, усиление порядка.

Введение. Известно [1, стр. 22], что Евклидова топология τ на $\mathbb{R}^n$ является единственной хаусдорфовой топологией, относительно которой непрерывны операции сложения и умножения на скаляр. Она может быть введена несколькими эквивалентными способами. Во-первых, с помощью евклидовой метрики: открытые шары $B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r \}$ образуют базу топологии. Во-вторых, как тихоновская топология произведения: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n сомножителей), базу которой образуют открытые параллелепипеды $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. В настоящей работе мы показываем, что эта же топология τ порождается отношением частичного порядка на $\mathbb{R}^n$, а также исследуем, как усиление порядка влияет на порождаемую им топологию.

Пусть имеется произвольное множество X. Говорят, что < задает частичный порядок [2] на множестве X, если выполнено:

1) $x < y \Rightarrow x \neq y$ – антирефлексивность.

2) $\forall\, x, y, z \in X$ таких, что $x < y$ и $y < z \Rightarrow x < z$ – транзитивность.

Если дополнительно любые два различные элемента сравнимы, т.е. для $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$, определено $x < y$ или $y < x$, порядок называется линейным.

Пусть на X задан частичный порядок. Определим три типа подмножеств множества X:

Интервалы:

$$(c, d) = \{x \in X \mid c < x < d\}$$

Левые лучи:

$$(-\infty, a) = \{x \in X \mid x < a\}$$

Правые лучи:

$$(b, +\infty) = \{x \in X \mid x > b\}$$

Обозначим семейство всех таких множеств, а также пустое множество и само множество X, через $\mathcal{B}$. Покажем, что $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии на X. Семейство множеств $\mathcal{B} \subseteq \tau$ называется базой топологии τ, если любое открытое множество $U \in \tau$ представляется в виде объединения элементов базы и для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ их пересечение $B_1 \cap B_2$ снова лежит в базе (замкнутость относительно пересечения).

Утверждение 1. *Введенное семейство множеств $\mathcal{B}$ образует базу некоторой топологии на X.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные пары элементов базы $\mathcal{B}$ и их пересечения. Среди них выделяется 8 случаев:

1) $(c_1, d_1) \cap (c_2, d_2) = (\max\{c_1, c_2\}, \min\{d_1, d_2\})$.

2) $(a, b) \cap (-\infty, c) = (a, \min\{b, c\})$

3) $(a, b) \cap (d, +\infty) = (\max\{a, d\}, b)$

4) $(-\infty, a) \cap (-\infty, b) = (-\infty, \min\{a, b\})$

5) $(a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (\max\{a, b\}, +\infty)$

6) $(-\infty, a) \cap (b, +\infty) = (b, a)$

7) $\emptyset \cap B = \emptyset$, $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

8) $X \cap B = B$, $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

Таким образом, пересечение элементов базы есть снова элемент базы: или порядковый интервал, или луч, или пустое множество. Значит, $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии, которую будем называть топологией, порожденной *частичным* порядком.

Топология на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Введём на $\mathbb{R}^n$ отношение $<_{coord}$, определим: $x <_{coord} y$, если $x_i < y_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Проверим, что это отношение является частичным порядком.

Антирефлексивность: для каждого i не выполнено $x_i < x_i$, поскольку < на $\mathbb{R}$ антирефлексивно. Значит, $<_{coord}$ антирефлексивно.

Транзитивность: если $x <_{coord} y$ и $y <_{coord} z$, то для каждого i выполнено $x_i < y_i$ и $y_i < z_i$. Поскольку < на $\mathbb{R}$ транзитивно, отсюда $x_i < z_i$ для каждого i, а значит $x <_{coord} z$.

Введенный частичный порядок будем называть *покоординатным*.

Теорема 1. *Покоординатный порядок задаёт стандартную топологию на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $a = (a_1,\dots,a_n)$ и $b = (b_1,\dots,b_n)$ – точки в $\mathbb{R}^n$, причём для всех координат $a_i < b_i$. Рассмотрим интервал в покоординатном порядке между этими точками:

$(a, b)_{coord} = \{ x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a <_{coord} x <_{coord} b \}$. Для случая $\mathbb{R}^2$ этот интервал изображён на рисунке 1.

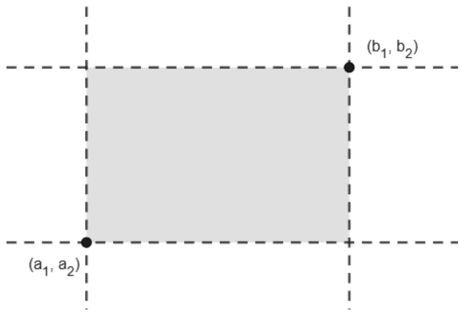

Рисунок 1 – Интервал $(a, b)_{coord}$ в $\mathbb{R}^2$, являющийся прямоугольником $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$.

Из определения покоординатного порядка следует: $(a, b)_{coord} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times\dots\times (a_n, b_n)$, где $(a_i, b_i) = \{ x_i \in \mathbb{R} \mid a_i < x_i < b_i \}$ – интервал на $\mathbb{R}$. Значит, порядковый интервал $(a, b)_{coord}$ является открытым подмножество в $\mathbb{R}^n$ (произведением открытых интервалов). Аналогично проверяется, что лучи $(a, +\infty)_{coord}$, $(-\infty, b)_{coord}$ также открыты. С другой стороны, всякий открытый параллелепипед P (элемент базы тихоновской топологии на $\mathbb{R}^n$) является интервалом в покоординатном порядке:

$$P = (x_1, y_1) \times \dots \times (x_n, y_n) = (x, y)_{coord}, \text{ где } x = (x_1,\dots,x_n),\ y = (y_1,\dots,y_n)$$

Возникает естественный вопрос: существуют ли другие порядки, порождающие ту же самую топологию? Как они связаны с рассмотренным покоординатным порядком?

Говорят, что частичный порядок $<_1$ на множестве X *не слабее*, чем частичный порядок $<_2$, если из $x <_2 y$ следует $x <_1 y$. Если, кроме того, существует $z, h \in X$ такие, что $z <_1 h$, но неверно, что $z <_2 h$, то говорят, что порядок $<_1$ *сильнее*, чем $<_2$. Примером более сильного порядка на $\mathbb{R}^n$, чем покоординатный, служит *лексикографический порядок* $<_{lex}$, который задается следующим образом: $(x_1, \dots, x_n) <_{lex} (y_1, \dots, y_n)$, если существует номер k ($1 \le k \le n$) такой, что $x_i = y_i$ для всех $i < k$ и $x_k < y_k$. Этот порядок является линейным (любые две точки сравнимы) и сильнее покоординатного порядка: если $x <_{coord} y$, то $x <_{lex} y$. Обратное неверно: например, $(0, 1) <_{lex} (1, 0)$, поскольку 0 < 1 по первой координате, но покоординатно эти точки несравнимы, так как 0 < 1 по первой и 1 > 0 по второй координате одновременно.

Говорят, что τ_1 *не слабее*, чем τ_2, если $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Если, кроме того, $\tau_1 \neq \tau_2$, то говорят, что τ_1 *сильнее*, чем τ_2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Топология τ_{lex}, порождённая лексикографическим порядком на $\mathbb{R}^n$, сильнее стандартной евклидовой топологии τ.*

Доказательство.

1. $\tau \subseteq \tau_{lex}$.

Пусть $U \in \tau$ – произвольное открытое множество в стандартной топологии и пусть $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$. По определению стандартной топологии существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$B(p, \varepsilon) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2} < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Рассмотрим лексикографический интервал:

$$I = ((p_1, p_2, \dots, p_n - \varepsilon), (p_1, p_2, \dots, p_n + \varepsilon)) = \{ y = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, y_n) : |y_n - p_n| < \varepsilon\}.$$

Для любой точки $y \in I$ выполнено: $\|y - p\| = |y_n - p_n| < \varepsilon$. Следовательно, $I \subseteq B(p, \varepsilon) \subseteq U$. При этом I является открытой окрестностью точки $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ в топологии τ_{lex}, значит, $U \in \tau_{lex}$. Поскольку U было произвольным, $\tau \subseteq \tau_{lex}$. Случай на $\mathbb{R}^2$ изображён на рисунке 2.

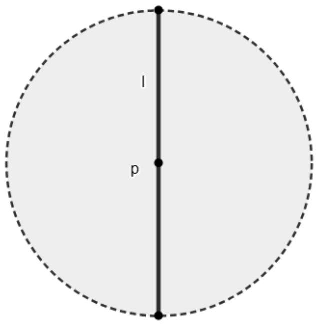

Рисунок 2 – $l \subseteq B(p, \varepsilon)$

2. *$\tau_{lex} \not\subset \tau$ (существует множество, открытое в τ_{lex}, но не открытое в τ).*

Покажем, что множество l, построенное в части 1 для произвольной точки $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, не является открытым в τ. Рассмотрим произвольный шар $B(p, \delta)$ радиуса $\delta > 0$ с центром в p. Точка $C = (p_1 + \delta/2, p_2, \ldots, p_n)$ лежит в этом шаре, так как расстояние от C до p равно $\delta/2 < \delta$. Однако первая координата точки C равна $p_1 + \delta/2 \neq 0$, поэтому $C \notin l$. Следовательно, $B(p, \delta) \not\subseteq l$ для любого $\delta > 0$, значит $l \notin \tau$. Соответствующая геометрическая иллюстрация на $\mathbb{R}^2$ приведена на рисунке 3.

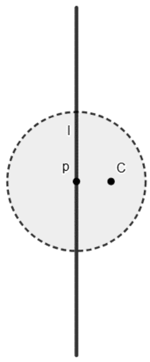

Рисунок 3 – Множество l и точка $C = (p_1 + \delta/2, p_2)$ на $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим покоординатный порядок на $\mathbb{R}^n$. Как видно из примера выше, пара точек (0,1) и (1,0) несравнима в нём: $x_1 < y_1$, но $x_2 > y_2$. Введём новый порядок $<_{ext}$ (от англ. extended – расширенный). Будем считать $x <_{ext} y$, если $x <_{coord} y$ или если $x_1 > y_1, x_2 < y_2, \ldots, x_n < y_n$. Введенный порядок сильнее покоординатного. Покажем, что этот порядок несравним с лексикографическим. Рассмотрим точки $x = (1, 0, \ldots, 0, 0)$ и $y = (0, 1, 1, \ldots, 1)$, в расширенном порядке $x <_{ext} y$, тогда как в лексикографическом порядке $y <_{lex} x$. Следовательно, расширенный порядок и лексикографический несравнимы.

Теорема 3. *Топология τ_{ext}, порожденная расширенным порядком, совпадает со стандартной топологией.*

Доказательство. Достаточно показать взаимное включение баз этих топологий.

1. *$\tau \subseteq \tau_{ext}$.*

Базисный элемент стандартной топологии – открытый параллелепипед $P = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, где $a_i < b_i$. Покажем, что P является интервалом расширенного порядка. Выберем точки: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Для них выполнено: $a_i < b_i$ для любого i. По определению $<_{ext}$ это означает $a <_{ext} b$.

Интервал $(a, b)_{ext} = (a, b)_{coord}$ состоит из точек x, таких что $a <_{ext} x <_{ext} b$. Тогда интервал равен:

$$(a, b)_{ext} = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) = P.$$

Следовательно, любой базисный элемент открыт в τ_{ext}.

2. *$\tau_{ext} \subseteq \tau$.*

Если $a <_{ext} b$, то возможны следующие случаи:

Сравнение выполнено покоординатно $a <_{coord} b$, получаем параллелепипед:

$$(a, b)_{ext} = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n).$$

$a <_{ext} b$, но неверно $a <_{coord} b$, тогда $(a_1 > b_1)$, $a_i < b_i$ для любого $i > 1$. Получаем параллелепипед

$$(a, b)_{ext} = (b_1, a_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n).$$

Аналогично проверяется, что лучи расширенного порядка также являются открытыми множествами в τ. В случае $\mathbb{R}^2$ $(B, D)_{ext} = (A, C)_{coord} = (A, C)_{ext}$, что изображено на рисунке 4.

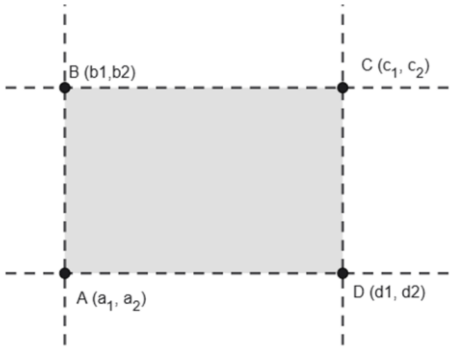

Рисунок 4

Заключение. В работе показано, что стандартная топология на $\mathbb{R}^n$ порождается покоординатным частичным порядком: его интервалы и лучи образуют базу стандартной топологии $\mathbb{R}^n$. Исследовано усиление порядка и его влияние на порождаемую топологию. Установлено, что лексикографический порядок является более сильным по сравнению с покоординатным и задаёт топологию, которая сильнее стандартной. Также рассмотрен расширенный порядок, порождающий ту же топологию, что и покоординатный. Это показывает, что усиление исходного порядка может приводить к усилению топологии, а может и не приводить.

Список использованных источников:

1. Рудин, У. Функциональный анализ/ У. Рудин; пер. с англ. В. Я. Лина. – Москва : Мир, 1975. – 450 с.

2. Александров, П. С. Введение в общую теорию множеств и функций / П. С. Александров. – М. : ОГИЗ – Гостехиздат, 1948. – 419 с.

UDC 515.125, 512.562

GENERABILITY OF EUCLIDEAN SPACE TOPOLOGY BY PARTIAL ORDER RELATIONS

Parkhaniuk M. P., student

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
Minsk, Republic of Belarus

Luxemburg I. L. – Assistant Professor

Annotation. This paper investigates the possibility of generating the standard Euclidean topology by partial order relations. It is proved that the topology whose basis is formed by intervals and rays of the coordinate-wise partial order coincides with the standard topology of Euclidean space. A comparative analysis of the effect of strengthening an order relation on the structure of the induced topology is carried out. It is established that the lexicographic order, being stronger than the coordinate-wise order, induces a topology strictly containing the standard one. An extended order is also considered, which turns out to be incomparable with the lexicographic order.

Keywords. Euclidean space topology, partial order, order topology, coordinate-wise order, lexicographic order, topological basis, comparison of topologies, extended order.