УДК 519.17

ГРАФЫ И ОБЛАСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЙ

Литвинович М.О., Вольский Г.В., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л.В. – старший преподаватель

Аннотация. В статье рассматривается прикладное значение теории графов и её основные понятия. Представлено, как графовые модели позволяют описывать отношения между объектами, исследовать структуры сложных систем, решать прикладные задачи в информатике, экономике, логистике, биологии, социальных сетях, а также задачи телекоммуникации, маршрутизации, оптимизации и анализа связей в различных областях науки. Также в статье приведены основные типы графов, их базовые характеристики и примеры их использования на практике.

Ключевые слова. Граф, подграф, вершина, ребро, ориентированный граф, взвешенный граф, путь, цикл, связность, компонент связности, кратчайший путь, применение графов, оптимизация.

Введение. Теория графов является важным универсальным инструментом математического моделирования. Она позволяет описывать связи между множеством объектов в компактной и наглядной форме. Граф удобно использовать для формального описания систем, в которых объекты связаны отношениями. Примерами могут послужить дороги, каналы связи, зависимости или взаимодействия. В зависимости от характеристик выделяют взвешенные и невзвешенные, ориентированные и неориентированные, связные и несвязные графы, каждые из которых находят применение в разнообразных задачах [1].

Графовые модели актуальны потому, что множество реальных систем имеют сетевую природу, такие как транспортные маршруты, компьютерные и телекоммуникационные сети, цепочки поставок, социальные взаимодействия, биологические и экономические системы. Применение графовых моделей имеет весомое преимущество в том, что они позволяют не только наглядно представить структуру системы, но и вычислять оптимальные маршруты, анализировать устойчивость, находить наиболее эффективные решения и применять строгие алгоритмы для анализа и оптимизации.

Графы нашли применение во многих сферах.

Основные понятия. Графом называется математический объект $G = (V, E)$, который состоит из множества вершин V и множества рёбер E, каждое из которых соединяет по две вершины. Граф называется взвешенным, если каждому ребру сопоставлен вес, то есть число, например длина или стоимость. В противном случае граф называется невзвешенным. Граф называется ориентированным, если каждое из рёбер имеет направление. Если рёбра не имеют направления и задают симметричную (двустороннюю) связь между вершинами, то граф называется неориентированным.

Важную роль в теории графов играют такие понятия, как степень вершины, путь, цикл, связность, компонент связности и расстояние между вершинами. Важным понятием также является подграф, то есть граф, полученный из исходного путем удаления части вершин и рёбер с сохранением смежности. Степень вершины определяется количеством рёбер, смежных с данной вершиной. Путём в графе называется последовательность вершин, в которой каждая пара соседних вершин соединена ребром. Циклом называется замкнутый путь. Граф называется связным, если он является неориентированным и между любой парой его вершин существует минимум один путь. В противном случае граф называется несвязным. Пример связного графа представлен на рисунке 1.

Компонентом связности называют максимальный по включению подграф, в котором любая вершина достижима из любой другой. То есть весь подграф является одной связной частью графа. Для математики и информатики особенно важно понятие деревьев – связных неориентированных графов без циклов, а также взвешенных графов, в которых вес ребра может интерпретироваться как длина, расстояние, стоимость, время, задержка или другая величина.

Для решения типичных задач, связанных с транспортной логистикой, навигацией и телекоммуникацией, используются классические алгоритмы Дейкстры, Беллмана – Форда и A*, которые активно применяются в навигационных системах, протоколах маршрутизации и системах поддержки принятия решений. Для анализа структуры графа используются матрица смежности и матрица инцидентности, позволяющие переходить от наглядной графовой модели к алгебраическому представлению и применять методы линейной алгебры и теории алгоритмов.

Графовые модели широко применяются в информатике, логистике, социальных сетях, биологии и экономике.

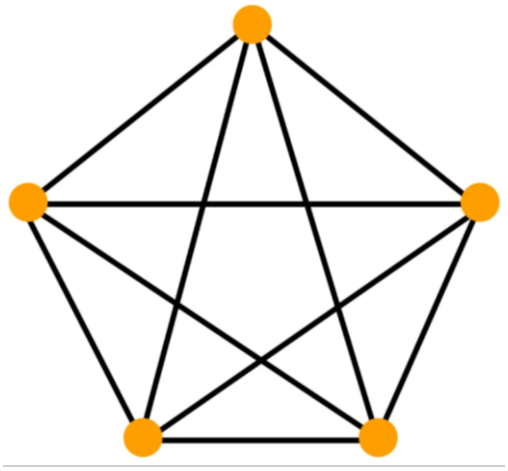

Рисунок 1 – Связный граф

Информатика и вычислительная техника. В информатике графы широко используются, например, для моделирования компьютерных сетей, разработки программ, анализа алгоритмов.

Сетевые протоколы описывают, как соединены устройства, потому с помощью графов удобно искать самый быстрый или самый короткий маршрут для передачи данных. В программной инженерии часто используются графы зависимостей, то есть ориентированные графы, где стрелки указывают, какой блок программы от какого зависит. Они помогают наглядно показать связи между модулями, оптимизировать порядок компиляции, упрощать тестирование. Также графы облегчают процесс обнаружения возможных точек отказа, то есть мест, от которых зависит крупная часть системы, и в случае поломки которых во всей системе произойдет сбой [2].

В контексте теории алгоритмов графы служат основой для задач, связанных с поиском, разрезами и потоками. Например, задачи максимального потока, то есть наибольшего количества данных, которые можно одновременно передать и минимального разреза, что означает наименьшее количество связей, которые нужно перекрыть, чтобы разорвать связь между определенными пунктами. Это делает оптимальным использование графов для анализа пропускной способности сетей и оптимизации распределения ресурсов. В базах данных и системах рекомендаций имеют широкое применение графовые СУБД, где данные и их отношения хранятся прямо в форме графа. Это позволяет эффективно выполнять запросы, которые связаны с поиском в системе путей, а также соседних к ним.

***Т**ранспорт и логистика.* Задачи транспорта и логистики являются одной из областей, где применение теории графов является наиболее наглядным. В задачах оптимальным является моделирование транспортной сети взвешенным графом, у которого вершины представляют собой города, склады или пункты доставки. Рёбра же подразумевают дороги, железнодорожные линии или авиамаршруты с соответствующими весами, которые характеризуют расстояние, время или стоимость перевозки.

Данные модели являются основой для решения задач поиска кратчайшего пути, построения оптимальных маршрутов и маршрутов обхода, а также задач, связанных с прокладыванием маршрутов подвижных объектов.

Принято формулирование задачи поиска кратчайшего пути или минимальной стоимости маршрута между двумя пунктами как задачи минимизации суммы весов рёбер на пути. Введём ориентированный взвешенный граф, где вершины – это города или склады:

$$L(P) = \sum_{e_{ij} \in P} w_{ij} \to \min, \tag{1}$$

где каждое ребро $e_{ij} \in P$ с весом w_{ij} обозначает маршрут из пункта i в пункт j, входящие в путь P, с заданной длиной, временем или стоимостью. В практическом контексте это означает выбор такого пути, для которого суммарные транспортные затраты будут минимальными.

Алгоритмы на основе графов позволяют учитывать ограничения по вместимости, временным окнам и приоритетности доставки. В области современных навигационных сервисов зачастую используются модифицированные алгоритмы Дейкстры и A*, которые оптимизированы для работы с крупными графами, представляющими собой дорожные сети, имеющими динамически изменяющиеся веса рёбер.

Социальные и информационные сети. Социальные и информационные сети, а также сети цитирования целесообразно представлять в виде графов. В таком случае вершины подразумевают пользователей, документы или веб-страницы, а рёбра соответствуют отношениям «друг», «подписчик», «ссылка» или «цитирование». Через анализ графов такого типа выявляются сообщества, определяются наиболее важные вершины, которые являются наиболее влиятельными, а также изучается процесс распространения информации.

Пример структуры фрагмента социальной сети представлен на рисунке (рис. 2). Размер вершины отражает её значимость, в данном случае количество подписчиков.

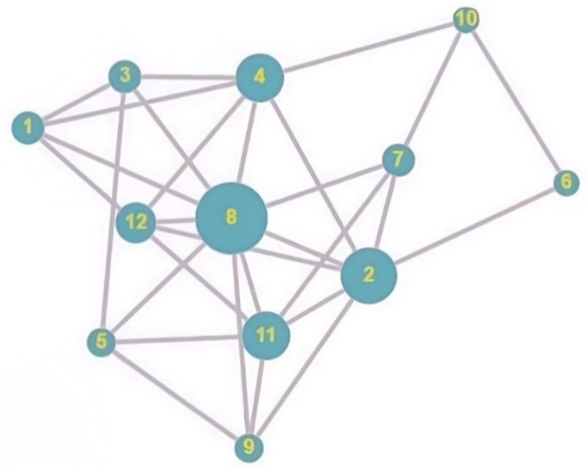

Рисунок 2 – Фрагмент графа социальной сети

В сфере социальных и информационных сетей важную роль играют также взвешенные графы, в которых удобно принимать вес ребра за частоту взаимодействий или силу влияния между пользователями. В таком контексте задача поиска крупнейших вершин формулируется как оптимизационная, где необходимо максимизировать суммарное влияние на пользователей при ограниченном числе вершин.

Методы центральности (по степени, по посредничеству, по близости) используют структуру графа, чтобы выявить «центральные», то есть наиболее важные, вершины, а также количественно оценить вклад каждой вершины в функционирование сети в целом. Данные методы являются основой для работы систем рекомендаций, ранжирования результатов поиска, а также систем обнаружения спама. Графовые алгоритмы применимы также при анализе устойчивости сети и исследовании устройства механизмов массового распространения информации [3].

Биология и медицина. В биологии и медицине графы используются для представления метаболических путей, взаимодействий белков, генетических регуляторных сетей. В данном случае узлы графа представляют собой молекулы, гены или белки, а рёбра описывают взаимодействия между ними или регуляторные связи. Анализ схем соединений между объектами в данных сетях помогает выделять ключевые элементы, которые отвечают за устойчивость системы. Важнейшим является способность выявлять потенциальные мишени для лекарственных воздействий [4]. Для данных областей наиболее распространённым является граф, показывающий возможность переливания разных групп крови. Данный граф представлен на рисунке 3.

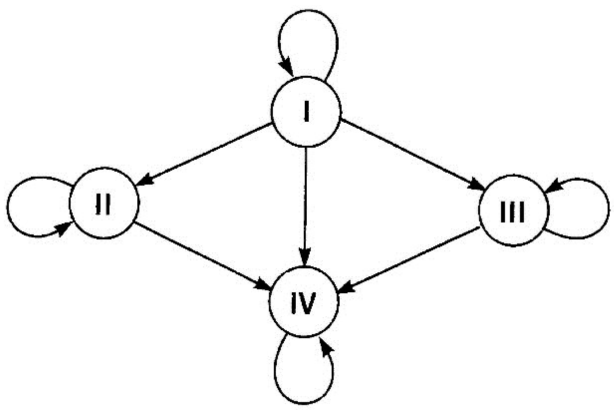

Рисунок 3 – Граф возможных вариантов переливания крови

Экономика и управление. Графы в экономике и управлении используются для описания производственных цепочек и зависимостей между ними, моделирования потоков ресурсов, денег и информации всех участников системы.

Экономическая сеть описывается графом, в котором вершины могут представлять собой предприятия, банки, рынки или проекты, а рёбра описывают финансовые потоки, контракты поставок, долевые участия или управленческие связи. Пусть f_{ik} – объём потока ребру (i,j). Тогда можно записать правило баланса потоков:

$$\sum_{i(i,k)\in E} f_{ik} - \sum_{j(k,j)\in E} f_{kj} = b_k, \tag{2}$$

где b_k – внешний приток, если b_k > 0 или отток, если b_k < 0 ресурса. Такая модель помогает в решении задач оптимизации логистических цепочек, а именно минимизации затрат на транспортировку и хранение, анализа устойчивости цепочек поставок и поиска «узких мест», моделирования межотраслевых балансов и влияния шоков на разные секторы, выбора оптимального портфеля проектов с учётом ограниченных ресурсов. На рисунке 2 представлен типичный граф экономической сети, где демонстрируется движения товаров между экономическими субъектами [5].

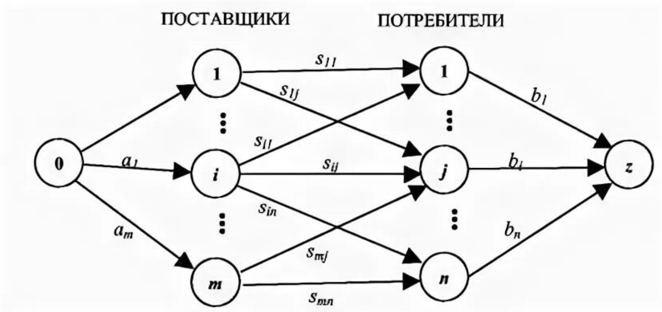

Рисунок 4 – Граф экономической сети

В управлении проектами широко используются сетевые графики (PERT/CPM). Работы изображаются рёбрами или вершинами, а зависимости и очередность выполнения – структурой графа. Это позволяет находить критический путь (минимальное возможное время реализации проекта), определять резерв времени у отдельных задач, перераспределять ресурсы, чтобы уменьшить риск срыва сроков.

Графовые модели также широко применяются в химии (графы молекул), в организации производственных процессов (графы технологических маршрутов), в управлении проектами (сетевые диаграммы PERT/CPM), а также в задачах планирования и оптимизации в экономиках и энергетике. Единство графового аппарата позволяет переносить методы и алгоритмы из одной области в другую, что делает теорию графов важным междисциплинарным инструментом.

Заключение. Теория графов представляет собой универсальный язык описания сложных систем, в котором значимы как объекты, так и связи между ними. Использование графовых моделей позволяет формализовать широкий спектр прикладных задач, применять строгие математические методы и разрабатывать эффективные алгоритмы анализа и оптимизации.

Графы являются не только фундаментальным математическим понятием, но и мощным практическим инструментом анализа процессов в информатике, логистике, социальных сетях, биологии и экономике, а их значение в науке и технике продолжает возрастать.

Список использованных источников:
1. *Омельченко, А. В. Теория графов : учебник / А. В. Омельченко. – СПб. : Питер, 2018. – 384 с.*
2. *Элементы теории графов и некоторые её приложения : учеб. пособие. – Наб. Челны : НЧТИ КФУ, 2014. – 92 с.*
3. *Теория графов : учебное пособие / под ред. Балашова. – Балашов, 2009. – 120 с.*
4. *Bondy, J. A. Graph Theory with Applications / J. A. Bondy, U. S. R. Murty. – New York : Elsevier, 1976. – 264 p.*
5. *Foulds, L. R. Graph Theory Applications / L. R. Foulds. – New York : Springer, 1992. – 385 p.*

UDC 519.17

GRAPHS AND THEIR FIELDS OF APPLICATION

Litvinovich M.O., Volski H.V., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Lobanok L.V. – Senior Lecturer

Annotation. This article examines the applied significance of graph theory and its fundamental concepts. It presents how graph models allow us to describe relationships between objects, explore the structures of complex systems, and solve applied problems in computer science, economics, logistics, biology, and social networks, as well as telecommunications, routing, optimization, and link analysis in various fields of science. The article also presents the main types of graphs, their basic characteristics, and examples of their practical use.

Keywords. Graph, subgraph, vertex, edge, directed graph, weighted graph, path, cycle, connectivity, connected component, shortest path, graph applications, optimization.