УДК 517.17

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

Берговин С. А., Юркевич Д. А., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Люксембург И. Л. – ассистент

Аннотация. В работе рассматриваются функции, определённые на отрезке $[0;1]$, которые в каждой точке имеют односторонние пределы (то есть допускают разрывы лишь первого рода). Доказывается, что множество точек разрыва такой функции не более чем счётно. Для любого счётного множества $A \subset [0;1]$, разбитого на четыре произвольных подмножества, строится функция, непрерывная вне множества A и имеющая в точках каждого подмножества разрыв заранее заданного типа (устранимый, скачок с непрерывностью слева, скачок с непрерывностью справа или скачок без односторонней непрерывности).

Ключевые слова. Разрывы первого рода, односторонние пределы, непрерывность функции, классификация разрывов, множество точек разрыва, функция Римана, равномерная сходимость, построение функций.

Введение. При построении математических моделей различных физических, химических и биологических процессов обычно используются дифференциальные и интегральные уравнения, коэффициенты которых описывают состояние внешней среды, в которой протекает исследуемый процесс. Эти коэффициенты отражают такие параметры, как температура, давление, плотность, химический состав или другие факторы, определяющие состояние среды. В классических подходах к моделированию обычно предполагается, что коэффициенты уравнений являются непрерывными функциями.

Однако, при моделировании процессов, протекающих в средах с резкими изменениями параметров, например, при моделировании турбулентности, фазовых переходов или других явлений с резкими градиентами возникают уравнения, коэффициенты которых могут иметь особенности. Поэтому возникает необходимость изучения свойств функций, допускающих разрывы.

Пусть функция f определена на множестве $[0;1]$ и имеет односторонние пределы в каждой точке:

$$f^{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ – предел в точке } x_0 \text{ слева,}$$
$$f^{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \text{ – предел в точке } x_0 \text{ справа.}$$

Это значит, что в каждой точке f или непрерывна, или имеет разрыв первого рода. Важным примером функции, допускающей такие разрывы, является функция Римана R (рис. 1). Она определяется следующим образом:

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1] \backslash \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{m}, & x = \dfrac{n}{m}, \text{где } \dfrac{n}{m} - \text{ несократимая дробь.} \end{cases}$$

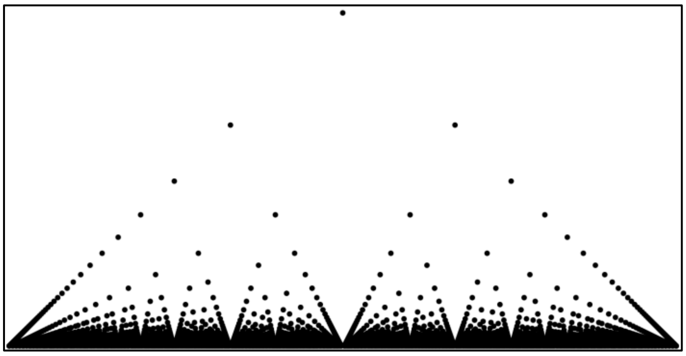

Рисунок 1 – График функции Римана

Функция Римана непрерывна на $[0;1]\backslash\mathbb{Q}$, так как предел и значение в каждой иррациональной точке равны нулю, и терпит устранимые разрывы на $\mathbb{Q}$.

Возникает вопрос: насколько пример такой функции типичен? Каковым может быть множество точек разрыва функции, имеющей односторонние пределы, какие у него теоретико-множественные и топологические свойства? Настоящая работа посвящена ответом на эти вопросы.

Мощность множества точек разрыва 1-го рода

Пусть функция f определена на множестве $[0;1]$ и имеет односторонние пределы в каждой точке и D – множество ее точек разрыва. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Множество D не более чем счётно.*

Доказательство. Введём величину разрыва функции в точке x

$$\Delta(x) = \max\{|f^-(x) - f^+(x)|, |f^-(x) - f(x)|, |f^+(x) - f(x)|\}$$

Рассмотрим множество точек разрыва x с величиной $\Delta(x)$ больше, чем $\frac{1}{n}$:

$$D_n = \left\{x \in [0;1] : \Delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

Достаточно показать, что D_n конечно. Предположим противное, тогда, по теореме Больцано – Вейерштрасса [1, стр. 87], множество D_n имеет предельную точку p. Это значит, что в любой окрестности точки p бесконечно много точек D_n. Тогда или в любой левосторонней окрестности, или в любой правосторонней окрестности бесконечно много точек D_n. Не ограничивая общности, предположим, что в левосторонней окрестности бесконечно много точек D_n. Тогда:

$$\forall\delta > 0\ \exists x_0 \in (D_n \cap (p - \delta; p) :\ \Delta(x_0) > \frac{1}{n}$$

Поскольку $x_0 \in D_n$, выполняется хотя бы одно из условий:

$$|f(x_0) - f^+(x_0)| > \frac{1}{n} \text{ или } |f(x_0) - f^-(x_0)| > \frac{1}{n} \text{ или } |f^+(x_0) - f^-(x_0)| > \frac{1}{n}$$

Тогда, существуют точки x_1, x_2 близкие к x_0 такие, что:

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \frac{1}{n} \quad (1)$$

Действительно, пусть:

$$\Delta(x_0) = |f^+(x_0) - f^-(x_0)| > \frac{1}{n} \quad (2)$$

Тогда для $\varepsilon = \frac{\Delta(x_0) - \frac{1}{n}}{2}$:

$$\exists\delta^- : x_1 \in (x_0 - \delta^-; x_0) \cap (p - \delta; p) \Longrightarrow |f(x_1) - f^-(x_0)| < \varepsilon \quad (3)$$
$$\exists\delta^+ : x_2 \in (x_0; x_0 + \delta^+) \cap (p - \delta; p) \Longrightarrow |f(x_2) - f^+(x_0)| < \varepsilon \quad (4)$$

Из неравенства треугольника и неравенств (2), (3) и (4) следует неравенство (1).

Пусть:

$$\Delta(x_0) = |f(x_0) - f^-(x_0)| > \frac{1}{n}$$

Тогда в качестве x_2 можно взять x_0, а x_1взять как в неравенстве (3). Для $\Delta(x_0) = |f(x_0) - f^+(x_0)|$, x_1, x_2 находятся аналогично.

С другой стороны, так как $f(x)$ имеет левый предел в точке p, то:

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{2n}, \exists\delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall\, x\ \in (p - \delta; p) \Longrightarrow |f(x) - f^-(p)| < \frac{1}{2n}$$

Тогда если $x_1, x_2 \in (p - d; p)$, то по неравенству треугольника:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{n}$$

Получаем противоречие с неравенством (1). Значит D_n– конечное множество.

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

Получаем счётное объединение конечных множеств, которое является не более чем счётным множеством [2, стр 25].

Пусть теперь функция f определена на множестве $\mathbb{R}$ и имеет односторонние пределы в каждой точке и D – множество ее точек разрыва.

Следствие. *Множество D не более чем счётно.*

Доказательство. Функция f на любом конечном отрезке допускает не более чем счётное число разрывов. Поскольку $\mathbb{R}$ представляется в виде объединения счётного числа отрезков:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k; k+1]$$

и счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно [2, стр. 25], то множество D не более чем счетно.

Построение функции с заданными типами разрывов на счетном множестве

Разрывы первого рода дополнительно классифицируются на два типа: устранимый разрыв и разрыв-скачок. Эта классификация основана на соотношении трех величин, правого предела, левого предела и значения в точке. В таблице 1 приведем более подробную классификацию.

Таблица 1 – Классификация разрывов первого рода.

Тип разрыва	Соотношение	Характеристика
0	$f^+(x) = f^-(x) = f(x)$	Непрерывность
1	$f^+(x) = f^-(x) \neq f(x)$	Устранимый разрыв
2	$f^+(x) \neq f^-(x) = f(x)$	Скачок, непрерывность слева
3	$f^-(x) \neq f^+(x) = f(x)$	Скачок, непрерывность справа
4	$f^-(x) \neq f^+(x)$ $f^-(x) \neq f(x)$ $f^+(x) \neq f(x)$	Скачок, отсутствие односторонней непрерывности

Пусть функция φ непрерывна в точке x и функция ψ имеет разрыв типа i в точке x, тогда справедливо следующее:

Утверждение 1. Функция $g = \varphi + \psi$ в точке x имеет разрыв типа i.

Доказательство следует из линейности односторонних пределов.

Теорема 2. Для любого $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ – счётного подмножества отрезка $[0; 1]$, представленного в виде дизъюнктного объединения четырех своих подмножеств: $A = A_1 \coprod A_2 \coprod A_3 \coprod A_4$, существует функция, непрерывная вне множества A и имеющая разрыв типа i на подмножестве A_i.

Доказательство. Элементы множества A будем обозначать как $a_n^{i_n}$, где нижний индекс показывает его номер во множестве A, а верхний – принадлежность к одному из подмножеств A_i, $i_n \epsilon \{1, 2, 3, 4\}$.

Для каждого n, рассмотрим функции $h_n^{(i_n)}$ которые в точке $a_n^{i_n}$ имеют разрыв типа i_n и непрерывные в остальных точках и $\left|h_n^{(i_n)}(x)\right| < \frac{1}{2^n}\ \forall x$.

Например, можно взять такие функции:

Тип 1 (устранимый разрыв)

$$h_{a_n}^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_n \\ \dfrac{1}{2^n}, & x = a_n \\ 0, & x > a_n \end{cases}$$

Тип 2 (непрерывность слева)

$$h_{a_n}^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a_n \\ \dfrac{1}{2^n}, & x > a_n \end{cases}$$

Тип 3 (непрерывность справа)

$$h_{a_n}^{(3)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & x < a_n \\ 0, & x \ge a_n \end{cases}$$

Тип 4 (общий случай)

$$h_{a_n}^{(4)}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_n \\ \dfrac{1}{2^{n+1}}, & x = a_n \\ \dfrac{1}{2^n}, & x > a_n \end{cases}$$

Составим функцию:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(i_n)}(x) \tag{5}$$

Покажем, что ряд (5) сходится равномерно. По условию $\left|h_n^{(i_n)}(x)\right| < \frac{1}{2^n}$, рассмотрим $M_n = \frac{1}{2^n}$. Тогда $\left|h_n^{(i_n)}(x)\right| \le M_n$, для всех x и ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

сходится и равен 1.

Следовательно, указанный числовой ряд мажорирует ряд (5), а значит, по признаку Вейерштрасса [3, стр. 427], ряд (5) сходится равномерно на [0;1].

Покажем, что функция f удовлетворяет утверждению теоремы. Возьмём произвольную точку y не принадлежащую множеству A. Для каждого n функция $h_n^{(i_n)}$ имеет разрыв только в точке $a_n^{i_n}$. Так как y не принадлежит A, каждая функция $h_n^{(i_n)}$ непрерывна в точке y. Если ряд из непрерывных в точке y функций сходится равномерно, то и сумма ряда в этой точке также будет непрерывна [3, стр. 430]. Значит, f непрерывна в y и в любой точке не принадлежащей A.

Рассмотрим произвольную точку $a_m^{i_m} \in A$, разложим ряд (5) на два слагаемых:

$$f(x) = h_m^{(i_m)}(x) + \sum_{n \ne m} h_n^{(i_n)}(x)$$

Тогда каждая функция $h_n^{(i_n)}$ непрерывна в точке $a_m^{i_m}$, если $n \ne m$, поэтому для любого фиксированного m функция

$$R_m(x) = \sum_{n \ne m} h_n^{(i_n)}(x)$$

непрерывна в точке $a_m^{i_m}$, так как ряд сходится равномерно. Тогда f есть сумма непрерывной и имеющей разрыв типа i_m в точке $a_m^{i_m}$, а значит, по утверждению 1, f имеет разрыв типа i_m в точке $a_m^{i_m}$.

Заключение. В данной работе были рассмотрены функции, определённые на отрезке $[0;1]$ и имеющие в каждой точке односторонние пределы. Такие функции образуют важный класс, занимающий промежуточное положение между непрерывными функциями и функциями с более сложными типами разрывов. В первой части исследования было доказано, что множество точек разрыва такой функции не более чем счётно.

Далее была приведена уточнённая классификация разрывов первого рода, выделяющая четыре типа: устранимый разрыв, разрыв с непрерывностью слева, разрыв с непрерывностью справа и разрыв без односторонней непрерывности. Такая классификация позволяет более детально описывать локальное поведение функции в точках разрыва.

Основным результатом работы стала конструкция, показывающая, что для любого счётного множества $A \subset [0;1]$, разбитого на четыре произвольных подмножества, существует функция, непрерывная вне A и имеющая в точках каждого подмножества разрыв заранее заданного типа.

Список использованных источников

1. Фихтенгольц, г.м. – курс дифференциального и интегрального исчисления. Том i, м., «наука», 1966г., 616 с.

2. П. С. Александров – введение в общую теорию множеств и теорию функций, огиз-гостехиздат, 1948 г., 419 с.

3. Фихтенгольц, г.м. – курс дифференциального и интегрального исчисления. Том ii, м., «наука», 1966 г., 800 с.

UDC 517.17

PROPERTIES OF FUNCTIONS WITH SIMPLE DISCONTINUITIES

Bergovin S. A., Yurkevich D. A., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Minsk, Republic of Belarus

Luxembourg I. L. – Assistant Professor

Annotation. This paper studies functions defined on the interval $[0;1]$that possess one-sided limits at every point (that is, functions that may have only simple discontinuities). It is proved that the set of discontinuity points of such a function is at most countable. For any countable set $A \subset [0,1]$, partitioned into four arbitrary subsets, a function is constructed that is continuous outside A and has, at the points of each subset, a discontinuity of a prescribed type (removable discontinuity, a jump discontinuity with left continuity, a jump discontinuity with right continuity, or a jump discontinuity without one-sided continuity).

Keywords. Simple discontinuities, one-sided limits, continuity of a function, classification of discontinuities, set of discontinuity points, Riemann function, uniform convergence, construction of functions.