ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОДНОСТОРОННЕГО ДОМИНИРОВАНИЯ С ЗАПРЕТАМИ

Политанский А.И., студент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Дугинов О.И. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. В работе рассматривается обобщение задачи одностороннего доминирования в двудольном графе. Пусть имеется двудольный граф G с долями V_1, V_2 и семейство S непустых подмножеств S_1, S_2, … , S_t множества вершин доли V_2. Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее (по числу вершин) подмножество D доли V_2 такое, что каждая вершина доли V_1 смежна по крайней мере с одной из вершин множества D и множество D содержит не более одной вершины из каждого множества S_i семейства S. Особенность задачи заключается в наличии семейства S «запрещающих» множеств. В работе исследуется вычислительный аспект указанной задачи, а именно формулируется её содержательная и распознавательная постановки, устанавливается вычислительная сложность и предлагается целочисленная линейная модель задачи. Кроме этого, разработаны и протестированы на случайных графах следующие эвристические алгоритмы, решающие указанную задачу приближённо: локальный поиск, метод имитации отжига, жадный алгоритм. Проведён сравнительный анализ работы алгоритмов.

1. Задача и её вычислительная сложность. Пусть имеется сеть железных дорог с железнодорожными станциями и несколько поездов с заданными маршрутами движения. Каждый поезд, следуя по маршруту, останавливается на некоторых станциях. В целях безопасности каждый поезд хотя бы на одной из станций, где происходит его остановка, должен пройти диагностику и техническое обслуживание. Пусть имеется семейство S множеств S_1, S_2, … , S_t станций. Нельзя размещать пункты обслуживания на двух или более станциях, принадлежащих одному множеству семейства S. Задача состоит в том, чтобы выбрать минимальное число станций, на которых необходимо разместить пункты технического обслуживания, таким образом, чтобы каждый поезд, следующий по маршруту, останавливался хотя бы на одной из станций, где размещён пункт технического обслуживания, и при этом в каждом множестве S_1, S_2, … , S_t семейства S было выбрано не более одной станции [1, 2]. В теоретико-графовой постановке задача формулируется следующим образом. Пусть $G = (V_1 \cup V_2, E)$ – двудольный граф с двумя долями V_1, V_2. Вершинами доли V_1 являются поезда, а вершинами доли V_2 — станции, S – набор «запрещающих» множеств станций. При этом вершина v_1 доли V_1 соединена ребром с вершиной v_2 доли V_2 тогда и только тогда, когда поезд v_1 останавливается на станции v_2. Будем говорить, что подмножество D множества вершин доли V_2 является *доминирующим вершины доли* V_1, если для каждой вершины доли V_1 (для каждого поезда) найдётся смежная с ней вершина множества D (станция множества D, на которой останавливается поезд). Задача состоит в том, чтобы найти минимальное число вершин доли V_2, которые потребуется включить в множество D, чтобы оно было множеством, доминирующим вершины доли V_1, и в множество D входило не более одной вершины каждого множества S_1, S_2, … , S_t семейства S.

Рассматриваемая задача ОДНОСТОРОННЕЕ ДОМИНИРОВАНИЕ С ЗАПРЕТАМИ в виде задачи распознавания свойств формулируется следующим образом:

Условие: задан двудольный граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, семейство S подмножеств S_1, S_2, … , S_t множества вершин доли V_2 и натуральное число k.

Вопрос: существует ли множество $D \subseteq V_2$ мощности не более k такое, что D является множеством, доминирующим вершины доли V_1, и для каждого множества S_i семейства S имеет место неравенство $|D \cap S_i| \le 1$?

Установлено, что задача является вычислительно сложной.

Теорема. *Задача* ОДНОСТОРОННЕЕ ДОМИНИРОВАНИЕ С ЗАПРЕТАМИ *является* NP-*полной*.

Полиномиальное сведение строится от классической NP-полной задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ [3].

2. Целочисленная линейная модель задачи. Приведём формулировку оптимизационной версии задачи ОДНОСТОРОННЕЕ ДОМИНИРОВАНИЕ С ЗАПРЕТАМИ в виде задачи целочисленного линейного программирования [4]. Обозначим мощность множества V_1 через n и мощность множества V_2 через m. Произвольным образом упорядочим множество вершин доли V_2 и обозначим их u_1, u_2, … . u_m. Аналогично поступим с вершинами доли V_1 – w_1, w_2, … , w_n. Для каждого подмножества S_i, $i = 1, 2, \dots, t$, множества V_2 построим характеристический вектор s_i, представляющий собой набор из m нулей и единиц, причём единицы располагаются на j-ых местах, для которых вершины u_j принадлежат множеству S_i. Пусть C – это матрица «двудольной» смежности графа G, т.е. матрица размера n на m, строки которой взаимно однозначно соответствуют вершинам доли V_1, а столбцы – вершинам доли V_2. При этом $c_{ij} = 1$, если вершина w_i смежна с вершиной u_j, и $c_{ij} = 0$, в противном случае. Для каждой вершины u_i доли V_2 заведём булеву переменную x_i, которая принимает значение 1, если вершина u_i входит в решение D, и значение 0, иначе. Число вершин в множестве D представляет собой сумму всех переменных x_i, где сумма берётся по всем значениям индекса i от 1 до m. Запишем условия, которые гарантируют, что для вершины w_i доли V_1 найдётся смежная с ней вершина u_j множества D

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j \geq 1.$$

Наложим ограничения на переменные, которые гарантируют, что решение *D* содержит не более одной вершины множества S_i из семейства *S*

$$\sum_{j=1}^{m} s_{ij} x_i \leq 1.$$

Целочисленная линейная модель оптимизационной версии задачи ОДНОСТОРОННЕЕ ДОМИНИРОВАНИЕ С ЗАПРЕТАМИ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{m} s_{ij} x_j \leq 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots$$

$$x_i \in Z, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots$$

3. Эвристические методы решения задачи. Задача ОДНОСТОРОННЕЕ ДОМИНИРОВАНИЕ С ЗАПРЕТАМИ является NP-полной. Это значит, что в предположении P ≠ NP, не существует алгоритмов, которые решают оптимизационный вариант задачи ОДНОСТОРОННЕЕ ДОМИНИРОВАНИЕ С ЗАПРЕТАМИ точно за полиномиальное время в худшем случае. Это обуславливает важность разработки эффективных методов приближённого решения задачи.

Для приближённого решения оптимизационной версии задачи были разработаны эвристические алгоритмы на основе локального поиска, имитации отжига и жадной стратегии [5]. Разработанные алгоритмы реализованы на языке программирования Python. Был проведён вычислительный эксперимент. Работа эвристических алгоритмов была протестирована на случайных графах модели Эрдёша-Реньи. Модель позволяет сгенерировать случайных граф порядка *n*, вероятность существования ребра между двумя вершинами определяется параметром *p* [6].

Выводы по экспериментам. Жадный алгоритм показал наилучший результат времени работы, однако находил менее точные решения чем локальный поиск и метод имитации отжига. Локальный поиск находил наилучшие решения при небольших временных затратах в то время, как метод имитации отжига, не получая лучших результатов по сравнению с локальным поиском, требовал большего количество итераций и затраченного времени. Можно сделать вывод, что жадный алгоритм оптимален при важности временных ограничений, в то время как локальный поиск находит наиболее близкие к лучшим решения. Метод имитации отжига не улучшил результат по сравнению с локальным поиском, но имеет большие временные требования.

Список использованных источников:

1. Weihe, K. Covering Trains by Stations or The Power of Data Reduction / K. Weihe // Proceedings of Algorithms and Experiments. – 1998. – P. 1-8.

2. Niedermeir, R. Invitation to Fixed-Parameter Algorithms / R. Niedeimeir. – Oxford University Press, 2006.

3. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир,1982.

4. Шевченко, В.Н. Линейное и целочисленное линейное программирование / В.Н. Шевченко, Н.Ю. Золотых. – Н.Н.: Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2005.

5. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц – М.: Мир, 1985. – 512 с.

6. Райгородский, А.М. Модели случайных графов и их применения / А.М. Райгородский // Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2, № 4(8). – С.130-140