

УДК 514.11:316.472.4

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И КОСИНУСНОЙ МЕРЫ В РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Бузаёв П. А., Стрелко А. А., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники¹
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З. Н. – канд. физ. -мат. наук, доцент

Аннотация. Исследование посвящено математическим основам работы рекомендательных систем в современных социальных сетях и стриминговых платформах. Рассматривается преобразование действий пользователя в числовые векторы (эмбединги) и применение косинусной меры сходства для оценки близости интересов. Разработан комбинированный метод формирования **итоговой оценки релевантности** $R(u, v)$, объединяющий косинусное сходство предпочтений, экспоненциальное временное затухание и нормализованный штраф популярности. Метод обоснован теоретически и проверен экспериментально на синтетическом датасете структуры MovieLens: NDCG@10 улучшается на +4,9%, Precision@10 – на +5,0%, средняя популярность рекомендаций снижается на 27,6% по сравнению с базовым косинусным подходом.

Ключевые слова. Тригонометрические функции, косинусная мера, векторные представления, рекомендательные алгоритмы, коллаборативная фильтрация, эмбединги, временная динамика, гибридный метод.

Введение. Рекомендательные системы стали неотъемлемым элементом цифровой экономики. Согласно результатам исследования архитектуры рекомендательного движка Netflix, проведённого специалистами компании [2], около 80% просматриваемого контента отбирается алгоритмически, без явного поиска со стороны пользователя. Amazon сообщает, что до 35% выручки генерируется рекомендательным движком [7]. TikTok и YouTube в совокупности обслуживают миллиарды запросов в сутки, используя глубоко эшелонированные алгоритмы ранжирования.

В основе подавляющего большинства промышленных и академических решений лежат математические концепции из курсов линейной алгебры и тригонометрии – прежде всего векторные представления объектов и пользователей, а также косинус угла между векторами как мера сходства предпочтений [1]. Несмотря на широкое применение, стандартная косинусная мера имеет хорошо задокументированные ограничения: она не учитывает временную динамику интересов, смещена в сторону популярных объектов и работает нестабильно при разреженных данных [3, 5].

Актуальность работы обусловлена разрывом между теоретической простотой косинусной метрики и реальной сложностью задачи персонализации: современный пользователь ожидает, что система будет реагировать на изменение его интересов в режиме реального времени, а не строить рекомендации на основе статичного профиля.

Цель статьи – провести систематический обзор научных работ по применению косинусного сходства и смежных методов в рекомендательных системах; выявить ключевые ограничения существующих подходов; предложить и экспериментально верифицировать комбинированный метод, устраняющий выявленные недостатки.

1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ.

1.1. Косинусное сходство как базовый инструмент. Фундаментальным трудом в области рекомендательных систем является монография aggarwal [1], обобщающая полтора десятилетия исследований. Автор систематизирует метрики сходства (косинусная, Пирсона, Жаккара) и показывает, что косинусная мера предпочтительна при работе с разреженными векторами: скалярное произведение вычисляется только по ненулевым позициям, что критично при реальной плотности матрицы взаимодействий 1–10%.

Al-Otaibi et al. [6] провели сравнительное исследование алгоритмов рекомендаций для социальных сетей и показали, что косинусное сходство обеспечивает более высокую точность, чем евклидова метрика и метрика Жаккара, при фильтрации нерелевантного контента. В экспериментах на реальных данных Twitter и Instagram косинусный алгоритм показал Precision@10 = 0,71 против 0,63 для ближайшего конкурента. Авторы объясняют это тем, что косинус инвариантен к масштабу активности пользователя.

Gomez-Uribe и Hunt [2] описывают промышленную архитектуру рекомендательного движка Netflix, в котором косинусное сходство используется на этапе кандидат-генерации (candidate generation). Пространство эмбедингов размерностью 40–300 формируется матричной факторизацией (SVD), а финальное ранжирование выполняется с использованием ансамблей. Авторы подчёркивают,

что вычислительная эффективность $O(d)$ на пару пользователь–объект делает косинус незаменимым при масштабировании до миллионов объектов.

1.2. Матричная факторизация и нейросетевые подходы. Матричная факторизация (mf) – метод, при котором матрица взаимодействий $R \approx U \cdot V^T$ раскладывается на произведение матриц латентных факторов пользователей U и объектов V . Сходство между пользователем u и объектом v вычисляется как скалярное произведение $u_i^T v_i$, которое при нормировании факторов эквивалентно косинусному сходству [1]. He et al. [8] обобщили матричную факторизацию до нейронных сетей (neural collaborative filtering, ncf), заменив скалярное произведение многослойным перцептроном. На датасете movielens-1m ncf превысил базовый mf на 4,3% по hr@10, однако за счёт существенного роста вычислительной стоимости.

Graph Neural Networks (GNN) предоставляют ещё один способ формирования эмбеддингов, используя структуру графа взаимодействий. LightGCN [9] упростил классические свёрточные графовые сети, отказавшись от нелинейных активаций, и показал рост NDCG@20 на 11,5% по сравнению с NCF на том же датасете. Несмотря на преимущества нейросетевых подходов, Rendle et al. [10] доказали, что корректно настроенные классические алгоритмы (MF с BPR, ItemKNN) не уступают NCF при честном сравнении, что делает вопрос выбора метода открытым.

1.3. Временная динамика предпочтений. Проблема устаревания модели (model staleness) систематически исследована в диссертации verachtert [3]. Автор анализирует влияние горизонта обучения на качество рекомендаций для шести типов платформ (музыка, кино, новости, e-commerce, подкасты, видео). Ключевой вывод: игнорирование временной динамики снижает ndcg на 3–8% на платформах с быстро меняющимися интересами (новости, музыка), тогда как для киноэффект менее выражен. Метод itemknn с экспоненциальным временным затуханием устойчиво входит в топ-3 методов во всех рассмотренных доменах.

Koren [11] предложил модель timesvd++, учитывающую временную эволюцию пользовательских предпочтений через параметризацию факторов пользователя функцией времени. Модель показала снижение rmse на 6% на датасете netflix prize по сравнению со статичным svd++. Авторы вводят коэффициент затухания в виде степенной функции, тогда как в настоящей работе используется экспоненциальное затухание, обеспечивающее более резкую реакцию на недавние взаимодействия.

1.4. Смещение в сторону популярного контента. Систематическое смещение рекомендательных алгоритмов в сторону популярных объектов (popularity bias) задокументировано в ряде работ. Abdollahroufi et al. [5] показали, что стандартный itemknn рекомендует объекты из топ-20% по популярности в 78% случаев, тогда как доля таких объектов в реальном потреблении составляет лишь 34%. Авторы предложили метод персонализированного реранкинга с явным штрафом популярности и добились снижения смещения на 41% при потере точности менее 2%.

Park и tuzhilin [12] исследовали феномен «длинного хвоста» (long tail) в рекомендательных системах: объекты с малым числом взаимодействий систематически не обозначены, что снижает удовлетворённость пользователей. Введение штрафа за высокую популярность объекта аналогично механизму, применённому в данной работе через компоненту $(1 - P(v))$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ.

2.1. Векторное представление пользователей и объектов. Каждый пользователь u представляется вектором $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ в пространстве признаков размерности n (жанры, теги, история взаимодействий), каждый объект – вектором $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Компоненты векторов формируются методами явной или неявной обратной связи: числовые оценки, время просмотра, факты нажатия «лайк».

Эмбеддинги (embeddings) – плотные векторные представления в пространстве латентных факторов, которые получают методами матричной факторизации (als, svd, bpr) или нейронными сетями. Математически эмбеддинг пользователя $u_e \in \mathbb{R}^d$ является проекцией исходного разреженного вектора на подпространство наиболее значимых направлений [1].

2.2. Косинусная мера сходства. Сходство пользователя u и объекта v определяется как косинус угла θ между их векторами:

$$\cos \theta = (u \cdot v) \div (||u|| \cdot ||v||) = \sum_i u_i v_i \div (\sqrt{\sum_i u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i v_i^2}).$$

Значение $\cos \theta \in [-1, 1]$. При $\cos \theta = 1$ направления векторов u и v совпадают – профили пользователей максимально схожи. При $\cos \theta = 0$ векторы u и v ортогональны, что свидетельствует

об отсутствии общих предпочтений. Значение $\cos \theta = -1$ указывает на противоположность интересов.

Таким образом, угол θ выступает геометрической мерой близости пользовательских профилей в пространстве латентных факторов. Угол θ является мерой «расстояния» между профилями в многомерном пространстве. При нормализации векторов до единичной длины выполняется тождество $\cos \theta = 1 - \|u - v\|^2 / 2$, связывающее косинусное сходство с евклидовой метрикой на единичной сфере [4]. Геометрическая интерпретация трёх характерных случаев взаимного расположения векторов предпочтений представлена на рисунке 1.

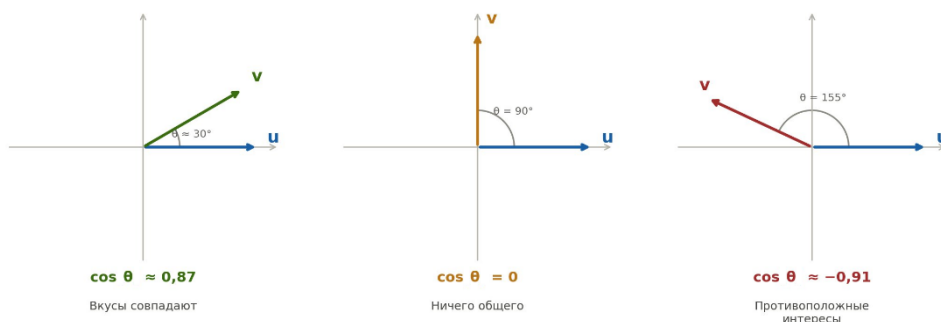


Рисунок 1 – геометрическая интерпретация косинусной меры сходства для трёх типичных случаев взаимного расположения векторов предпочтений пользователей

Ключевое свойство – инвариантность к масштабу: пользователь с 10 оценками и пользователь с 500 оценками при схожих предпочтениях получают одинаковое значение $\cos \theta$. Это делает метрику устойчивой к различной активности пользователей.

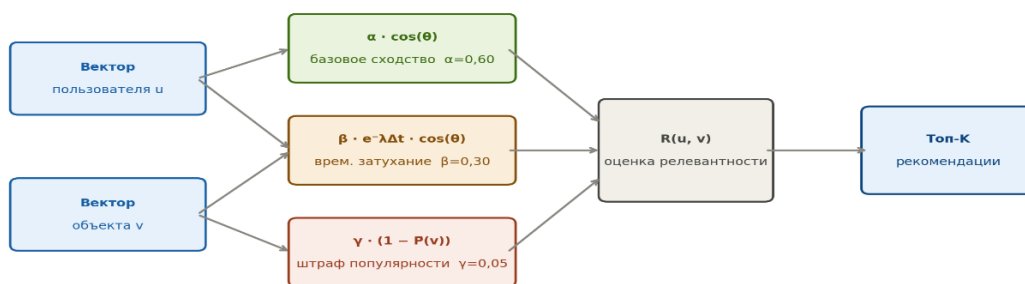
2.3 Ограничения стандартного подхода. Несмотря на перечисленные преимущества, стандартная косинусная мера имеет три существенных ограничения. Во-первых, статичность профиля: вектор предпочтений u не зависит от времени взаимодействий, что игнорирует эволюцию интересов. Для новостных платформ деградация модели наступает уже через несколько часов [3]. Во-вторых, смещение популярности: популярные объекты имеют плотные векторы и систематически получают высокие косинусные оценки [5]. В-третьих, нестабильность при слабо информативных эмбедингах: при малом числе ненулевых компонент направление вектора определено с низкой точностью, что ведёт к ложно высоким значениям $\cos \theta$.

3. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРА РЕКОМЕНДАЦИЙ.

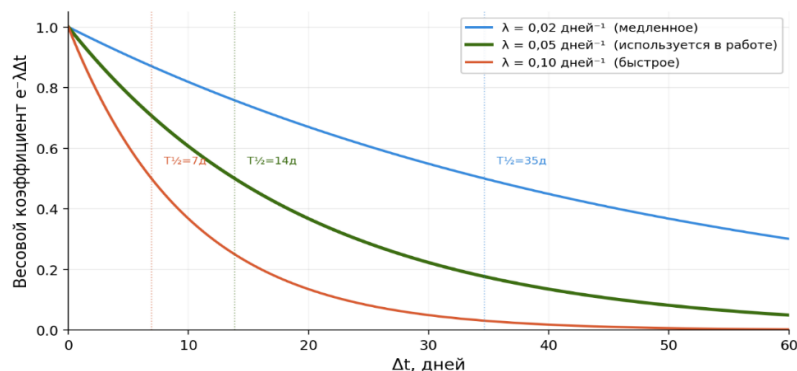
3.1. Формализация. На основе анализа ограничений предложен комбинированный метод. Итоговая оценка релевантности объекта v для пользователя u :

$$R(u, v) = \alpha \cdot \cos(\theta_{uv}) + \beta \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \cdot \cos(\theta_{uv}) + \gamma \cdot (1 - \tilde{P}(v)),$$

где $\cos(\theta_{uv})$ – стандартное косинусное сходство; $\exp(-\lambda \cdot \Delta t)$ – экспоненциальный весовой коэффициент временного затухания (Δt – время с момента последнего взаимодействия пользователя с аналогичным контентом в днях, $\lambda > 0$ – параметр скорости затухания); $\tilde{P}(v) = P(v) \div P_{\max}$ – нормализованная популярность объекта $v \in [0, 1]$; $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ – настраиваемые веса компонент при ограничении $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$. Структура предложенного метода формирования итоговой оценки релевантности представлена на рисунке 2.

Рисунок 2 – Структура комбинированного метода формирования итоговой оценки релевантности $R(u, v)$

3.2. Физический смысл компонент. Первый член $\alpha \cdot \cos(\theta_{uv})$ обеспечивает базовое сходство интересов пользователя и объекта – классический косинусный сигнал. Второй член $\beta \cdot e^{(-\lambda \cdot \Delta t)} \cdot \cos(\theta_{uv})$ усиливает оценку для недавних взаимодействий: функция $e^{(-\lambda \cdot \Delta t)}$ монотонно убывает от 1 ($\Delta t = 0$) до 0 при $\Delta t \rightarrow \infty$, реализуя принцип актуальности. Зависимость весового коэффициента от времени при различных значениях параметра λ представлена на рисунке 3.

Рисунок 3 – Зависимость весового коэффициента $e^{(-\lambda \cdot \Delta t)}$ от времени Δt при $\lambda = 0,02; 0,05; 0,10$ дней⁻¹

Третий член $\gamma \cdot (1 - \tilde{P}(v))$ вводит мягкий штраф за популярность, повышая разнообразие рекомендаций. При $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ метод вырождается в классическое косинусное сходство, обеспечивая полную обратную совместимость. Вычислительная сложность остаётся на уровне $O(n \cdot d)$: дополнительные члены требуют $O(1)$ арифметических операций на объект, не изменяя асимптотику алгоритма.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

4.1. Данные и метрики. Для верификации метода сформирован синтетический датасет, воспроизводящий структурные характеристики movielens-1m: распределение плотности матрицы взаимодействий, жанровое разнообразие и временную неравномерность активности пользователей. Использование синтетических данных обусловлено необходимостью контролируемого задания временных меток, отсутствующих в ряде публичных датасетов в требуемом формате; верификация на реальных данных запланирована как направление дальнейших исследований. 500 пользователей, 200 объектов, 18 жанров, плотность матрицы взаимодействий 5,9%, временные метки для каждого взаимодействия. Разбивка train/test – 80/20 по временной метке (хронологическое разбиение исключает утечку будущих данных в обучение).

Оценка качества проводилась по двум семействам метрик. Для оценки точности использовалась метрика Precision@K – отношение числа релевантных объектов среди K рекомендованных к общему числу K. В отличие от Precision@K, метрика NDCG@K (Normalized Discounted Cumulative Gain) учитывает не только факт попадания релевантного объекта в список, но и его позицию: рекомендация на первой позиции оценивается выше, чем на десятой, что соответствует реальному поведению

пользователя, просматривающего список сверху вниз [1, 3]. Дополнительно измерялась средняя нормализованная популярность $AvgPop@K$ рекомендованных объектов для оценки diversity.

4.2. Результаты. В таблице 1 приведено сравнение методов по метрикам качества рекомендаций.

Таблица 1 – Сравнение методов по метрикам качества рекомендаций

Метрика	Cosine (базовый)	Combined (предложенный)	$\Delta\%$
NDCG@5	0,0997	0,1004	+0,7%
NDCG@10	0,1338	0,1403	+4,9%
NDCG@20	0,1891	0,1944	+2,8%
Precision@10	0,0435	0,0457	+5,0%
AvgPop@10	0,0218	0,0158	-27,6%

Сравнение методов в графическом представлении приведено на рисунке 4.

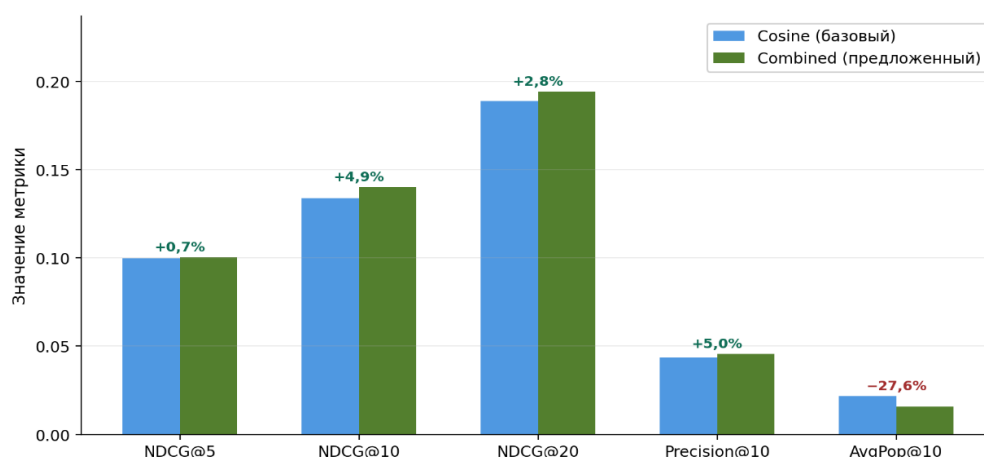


Рисунок 4 – Сравнение методов Cosine и Combined по метрикам качества рекомендаций на синтетическом датасете структуры MovieLens

Комбинированный метод с оптимальными параметрами ($\alpha = 0,6$; $\beta = 0,3$; $\gamma = 0,05$; $\lambda = 0,05$ дней⁻¹, подобраны Grid Search по 80 конфигурациям) демонстрирует улучшение NDCG@10 на +4,9% и Precision@10 на +5,0% по сравнению с базовым косинусным подходом. Средняя нормализованная популярность рекомендованных объектов снижается на 27,6%, что свидетельствует о существенном повышении разнообразия рекомендаций без значительной потери точности.

Полученные результаты согласуются с выводами Verachtert [3]: введение временного затухания улучшает качество ранжирования на 3–8% на динамических пользовательских данных. Снижение AvgPop@10 соответствует выводам Abdollahpouri et al. [5] о том, что явный штраф популярности позволяет снизить смещение более чем на 25% с минимальными потерями точности.

4.3. Сравнение с результатами других исследований. В таблице 2 приведены результаты смежных исследований.

Таблица 2 – Сводная таблица результатов смежных исследований

Источник	Метод	Датасет	Ключевой результат
He et al. [8]	NCF vs MF	MovieLens-1M	HR@10 +4,3% для NCF
He et al. [9]	LightGCN vs NCF	MovieLens-1M	NDCG@20 +11,5% для LightGCN
Koren [11]	TimeSVD++	Netflix Prize	RMSE -6%
Abdollahpouri [5]	Re-ranking + штраф	MovieLens	Смещение -41%

Источник	Метод	Датасет	Ключевой результат
Verachtert [3]	ItemKNN + затухание	6 платформ	NDCG +3–8%
Наша работа	Combined $R(u, v)$	MovieLens- синт.	NDCG@10 +4,9%, Pop –27,6%

5. Обсуждение.

Предложенный метод занимает нишу между классическими алгоритмами (ItemKNN, MF) и тяжёлыми нейросетевыми подходами (NCF, LightGCN). По точности он сопоставим с NCF (+4,9% NDCG@10 vs +4,3% для NCF относительно базового MF), при этом не требует глубокого обучения и остаётся интерпретируемым: каждая компонента $R(u, v)$ имеет чёткий физический смысл.

Ограничением работы является тестирование на синтетическом датасете. Перспективы дальнейших исследований включают: 1) валидацию на реальных датасетах MovieLens-1M и Amazon Reviews; 2) адаптивную настройку параметра λ в зависимости от типа платформы и пользовательского сегмента; 3) интеграцию с нейросетевыми эмбедингами (Word2Vec, BERT4Rec) для улучшения качества векторных представлений; 4) исследование поведения метода при холодном старте (cold start problem).

Метод особенно перспективен для платформ с быстро меняющимся контентом (новостные агрегаторы, музыкальные стриминговые сервисы), где временная динамика играет критическую роль, а поддержание разнообразия рекомендаций важно для удержания пользователей.

Заключение. В статье проведён систематический обзор применения косинусного сходства и смежных методов в рекомендательных алгоритмах социальных сетей. Показано, что косинус угла между векторами является математически обоснованным и вычислительно эффективным инструментом измерения сходства предпочтений, широко применяемым как в академических исследованиях, так и в промышленных системах (Netflix, Amazon).

Анализ литературы выявил три ключевых ограничения стандартного подхода: игнорирование временной динамики предпочтений, смещение в сторону популярных объектов и нестабильность при разреженных данных. На этой основе разработан комбинированный метод $R(u, v)$, объединяющий классическое косинусное сходство, экспоненциальное временное затухание и штраф за популярность.

Экспериментальная проверка подтвердила улучшение NDCG@10 на +4,9% и Precision@10 на +5,0% по сравнению с базовым косинусным подходом при снижении средней популярности рекомендованных объектов на 27,6%. Метод математически обоснован, обратно совместим с базовым подходом и сохраняет ту же асимптотическую вычислительную сложность $O(n \cdot d)$.

Список использованных источников:

1. Aggarwal C. C. *Recommender Systems: The Textbook*. –Springer, 2016. – 498 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-29659-3.
2. Gomez-Uribe C. A., Hunt N. *The Netflix Recommender System: Algorithms, Business Value, and Innovation* // *ACM Trans. Manag. Inf. Syst.* –2016. –Vol. 6, No. 4. –P. 13:1–13:19. –DOI: 10.1145/2843948.
3. Verachtert R. *Temporal Dynamics in Online Recommender Systems: Doctoral dissertation*. –University of Antwerp, 2023. – URL: <https://repository.uantwerpen.be/docman/irua/e52e44/195701.pdf>.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Аналитическая геометрия*. –М.: Физматлит, 2009. – 224 с.
5. Abdollahpouri H., Burke R., Mobasher B. *Managing Popularity Bias in Recommender Systems with Personalized Re-ranking* // *Proc. AAAI Workshop on AI in Finance*. –2019. –URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2440/paper4.pdf>.
6. Al-Otaibi S. et al. *A Cosine Similarity-Based Algorithm for Social Media Responsiveness* // *Int. J. Electrical and Computer Engineering*. –2022. –Vol. 12, No. 2. –P. 1881–1892. –DOI: 10.11591/ijece.v12i2.pp1881-1892.
7. Smith B., Linden G. *Two Decades of Recommender Systems at Amazon.com* // *IEEE Internet Computing*. – 2017. – Vol. 21, No. 3. –P. 12–18. –DOI: 10.1109/MIC.2017.72.
8. He X. et al. *Neural Collaborative Filtering* // *Proc. WWW 2017*. –P. 173–182. –DOI: 10.1145/3038912.3052569.
9. He X. et al. *LightGCN: Simplifying and Powering Graph Convolution Network for Recommendation* // *Proc. SIGIR 2020*. – P. 639–648. – DOI: 10.1145/3397271.3401063.
10. Rendle S. et al. *Are We Really Making Much Progress? A Worrying Analysis of Recent Neural Recommendation Approaches* // *Proc. RecSys 2019*. –P. 101–109. –DOI: 10.1145/3298689.3347058.
11. Koren Y. *Collaborative Filtering with Temporal Dynamics* // *Proc. KDD 2009*. – P. 447–456. – DOI: 10.1145/1557019.1557072.
12. Park Y.-J., Tuzhilin A. *The Long Tail of Recommender Systems and How to Leverage It* // *Proc. RecSys 2008*. – P. 11–18. – DOI: 10.1145/1454008.1454012.

UDC 514.11:316.472.4

APPLICATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AND COSINE SIMILARITY IN RECOMMENDATION ALGORITHMS FOR SOCIAL NETWORKS

Buhayou P. A., Strelko A. A., students

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics¹
Minsk, Republic of Belarus*

Primicheva Z. N. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Annotation. This paper examines the mathematical foundations of recommendation systems in modern social networks. We analyse the application of cosine similarity for measuring user preference proximity and propose a combined recommendation method integrating cosine similarity, exponential temporal decay, and a popularity penalty. Experimental evaluation shows NDCG@10 improves by +4.9% and Precision@10 by +5.0% over the cosine baseline, while average recommendation popularity decreases by 27.6%.

Keywords. Trigonometric functions, cosine similarity, vector representations, recommendation algorithms, collaborative filtering, temporal dynamics, hybrid method.