

УДК 514.752.6

## СВОЙСТВА ОГИБАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

Лопата Д.А., студент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент

**Аннотация.** Исследуются свойства огибающих семейств кривых и рассматриваются решения обратных задач. Изучены методы нахождения огибающих и восстановления семейств по ним. Установлено, что эволюта является огибающей нормалей, что используется для проверки расчетов. Опровергнута гипотеза о синхронных квадратичных функциях, но найдены функции с общей эволютой. Предложен алгоритм построения всех эвольвент по заданной эволюте.

**Ключевые слова.** Огибающая, семейство кривых, эволюта, эвольвента, обратная задача, нормаль, дифференциальное уравнение.

**Введение.** Понятие огибающей семейства кривых является одним из ключевых в дифференциальной геометрии и математическом анализе. Оно находит широкое применение не только в теоретической математике, но и в физике (оптика, механика), инженерии (профилирование деталей) и архитектуре. Несмотря на классический статус темы, исследование свойств огибающих позволяет открывать новые геометрические закономерности и решать обратные задачи.

### 1. Свойства кривых как огибающих.

**Определение [2, стр.174].** Кривая  $\Gamma$  называется огибающей семейства кривых, если для любой плоской окрестности каждой её точки  $M$  существует кривая семейства, касающаяся  $\Gamma$  в точке  $M$  и геометрически отличная от  $\Gamma$  в этой окрестности.

Рассмотрим три способа нахождения огибающей семейства кривых.

**Первый способ** применим в случае, когда речь идет о семействе прямых и уравнение  $A(\alpha)x + B(\alpha)y + C(\alpha) = 0$  является квадратным относительно некоторого параметра  $\alpha$ . Условие касания прямой и огибающей соответствует случаю кратных корней этого уравнения относительно параметра  $\alpha$ , то есть приравнению дискриминанта соответствующего квадратного уравнения к нулю. Кривая, удовлетворяющая полученной зависимости, и будет огибающей (или геометрическим местом особых точек) для рассматриваемого семейства прямых.

**Второй способ** является более общим, связан с производной функции и применим для нахождения огибающей различных семейств линий  $f(x, y, \alpha) = 0$  в случаях нелинейных зависимостей.

Огибающую можно получить, исключив параметр  $\alpha$  из системы 
$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Не всякая кривая, удовлетворяющая зависимости, полученной в результате исключения параметра  $\alpha$ , будет огибающей. Проверку можно выполнить (в ходе работы с целью экономии пространства проверка не фиксировалась), используя равенство 
$$\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = -\frac{f'_x(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha)}{f'_y(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha)}$$
 где

$$\begin{cases} x = \varphi(\alpha), \\ y = \psi(\alpha). \end{cases}$$

**Третий способ** основан на переходе к дифференциальному уравнению семейства кривых. Он применим в случаях, когда алгебраическое исключение параметра из системы уравнений неудобно. Пусть семейство кривых задано уравнением  $F(x, y, \alpha) = 0$ , где  $\alpha$  — параметр. Огибающая удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и всё семейство кривых, поэтому на практике метод сводится к исключению параметра через производную  $y'$ .

Дифференцируя уравнение семейства по  $x$  и исключая параметр  $\alpha$ , получаем дифференциальное уравнение вида  $\Phi(x, y, y') = 0$ . Огибающая является особым решением этого

уравнения и находится из системы: 
$$\begin{cases} \Phi(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0. \end{cases}$$

Решение некоторых задач на нахождение огибающих кривых позволяет установить свойства известных кривых.

**Пример 1.1 ([1], с. 5).** Семейство состоит из прямых  $l(\alpha)$  ( $\alpha$  – параметр) вида

$$bx(1 + \alpha^2) + ay(1 - \alpha^2) - 2\alpha ab = 0,$$

где  $a, b$  – заданные положительные числа.

Докажите, что эти прямые вместе с прямыми  $y = \frac{bx}{a}$  и  $y = -\frac{bx}{a}$  определяют треугольник постоянной площади  $S = ab$ . Найдите огибающую этого семейства прямых.

*Решение.* Найдём точки  $P$  и  $Q$  пересечения каждой из предложенных прямых с прямыми  $y = \frac{bx}{a}$  и  $y = -\frac{bx}{a}$  и докажем, что  $OP \cdot OQ = a^2 + b^2$  и  $S_{\Delta OPQ} = ab$  (рис.1).

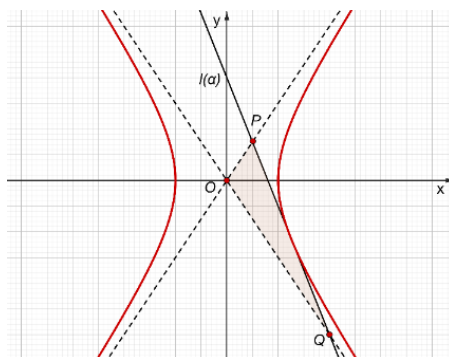


Рисунок 1 – Геометрическая иллюстрация к примеру 1.1: касательная к гиперболе и треугольник, образованный с асимптотами

$$\begin{cases} bx = \alpha y, \\ \alpha y(1 + \alpha^2) + \alpha y(1 - \alpha^2) - 2\alpha ab = 0; \end{cases}$$

$$2\alpha y = 2\alpha ab; y = b\alpha; x = \alpha a; P(\alpha a; b\alpha); OP = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{cases} bx = -\alpha y, \\ -\alpha y(1 + \alpha^2) + \alpha y(1 - \alpha^2) - 2\alpha ab = 0; \end{cases}$$

$$-2\alpha^2 \alpha y = 2\alpha ab; y = -\frac{b}{\alpha}; x = \frac{a}{\alpha}; Q\left(\frac{a}{\alpha}; -\frac{b}{\alpha}\right); OQ = \frac{1}{|\alpha|}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$OP \cdot OQ = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{|\alpha|}\sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2;$$

$\beta$  — угол наклона асимптоты  $y = \frac{bx}{a}$  к оси  $Ox$ .

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin 2\beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2};$$

$$S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2}OP \cdot OQ \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{\alpha}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} = ab.$$

Найдём теперь огибающую предложенного семейства прямых. Для этого перепишем уравнение как квадратное относительно параметра  $\alpha$ :

$$\alpha^2(bx - ay) - 2\alpha ab + bx + ay = 0.$$

$$\frac{D}{4} = a^2b^2 - (b^2x^2 - a^2y^2) = 0; b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{гипербола.}$$

В итоге, огибающей семейства прямых является гипербола  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Поскольку все прямые предложенного семейства являются касательными к полученной гиперболе, то можно сформулировать свойство: любая касательная к гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  определяет вместе с ее асимптотами треугольник постоянной площади, причем  $S = ab$ .

Решение предложенных в статье [1, с. 5] задач 1, 3, 6 позволило сформулировать следующие свойства: для любой касательной вида  $ax + by = 1$  к окружности  $x^2 + y^2 = 1$  выполняется условие  $a^2 + b^2 = 1$ ; любая касательная к параболы является осью симметрии для фокуса данной параболы и произвольной точки, взятой на директрисе; для параболы  $y = \frac{\sqrt{2}}{2a}x^2 + \frac{a\sqrt{2}}{4}$  все касательные, проведенные в точках  $x_0 \in \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ , отсекают от прямого угла, образованного биссектрисами первого и второго координатных углов, треугольники, сумма длин катетов которых равна  $a$ , у астроида  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$  все отрезки касательных, заключенные между осями координат, равны  $l$ .

**Пример 1.2 ([1], с. 5).** Дан отрезок длины  $l$ , который «скользит» по сторонам прямого угла. Найдите огибающую для всевозможных положений данного отрезка.

*Решение.* Пусть вершина прямого угла совпадает с началом координат, а катеты лежат на осях координат. Пусть длина катета, лежащего на оси абсцисс, равна  $a$ , тогда длина второго катета равна  $\sqrt{l^2 - a^2}$  ( $a$  – параметр). Рассмотрим ситуацию для первой координатной четверти. Уравнение прямой, проходящей через вершины острых углов рассматриваемого треугольника, имеет вид:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} = 1$ .

$$\text{Тогда } f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 \text{ и } f'_a(x, y, a) = -\frac{x}{a^2} + \frac{ay}{\sqrt{(l^2 - a^2)^3}}.$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 = 0, \\ -\frac{x}{a^2} + \frac{ay}{\sqrt{(l^2 - a^2)^3}} = 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} = 1, \\ \frac{y}{\sqrt{(l^2 - a^2)^3}} = \frac{x}{a^3}. \end{cases}$$

Выполним преобразования для второго уравнения системы.

$$\frac{\sqrt[3]{y^2}}{l^2 - a^2} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{a^2} = \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}{l^2} \text{ (если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}).$$

$$a^2 = \frac{l^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}; a = \frac{l \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}; l^2 - a^2 = \frac{l^2 \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}; \sqrt{l^2 - a^2} = \frac{l \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}.$$

Подставим полученные выводы в первое уравнение системы:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}}{l} + \frac{\sqrt[3]{y^2} \sqrt{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}}{l} = 1, \text{ или } (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^{\frac{3}{2}} = l, \text{ или } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} - \text{астроида.}$$

Таким образом, у астроида  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$  все отрезки касательных, заключенные между осями координат, равны  $l$ .

**Пример 1.3.** Найдите огибающую для всех хорд, которые отсекают от параболы  $y = x^2$  криволинейную трапецию постоянной площади.

*Решение.* Рассмотрим некоторую хорду  $AB$  параболы  $y = x^2$ , где  $A(a; a^2)$  и  $B(b; b^2)$ . Определим уравнение прямой  $AB$ .

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2}; x-a = \frac{y-a^2}{b+a}; y = (a+b)x - ab.$$

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой и хордой  $AB$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx &= \left( (a+b) \frac{x^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \\ &= (a+b) \frac{b^2}{2} - ab^2 - \frac{b^3}{3} - (a+b) \frac{a^2}{2} + a^2b + \frac{a^3}{3} = \frac{1}{6} (3(a+b)(b^2 - a^2) + 6ab(a-b) + \\ &\quad 2(a^3 - b^3)) = \\ &= \frac{1}{6} (3ab^2 + 3b^3 - 3a^3 - 3a^2b + 6a^2b - 6ab^2 + 2a^3 - 2b^3) = \frac{1}{6} (b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2b) = \\ &= \frac{1}{6} (b-a)^3 = S. \end{aligned}$$

Выразим  $b$  через  $a$ :  $b = \sqrt[3]{6S} + a$ .

Тогда уравнение прямой имеет вид  $y = (2a + \sqrt[3]{6S})x - a(a + \sqrt[3]{6S})$ .

Преобразуем его в квадратное уравнение относительно  $a$ :  $a^2 - (2x - \sqrt[3]{6S})a - x\sqrt[3]{6S} + y = 0$ ;

$$D = 4x^2 - 4x\sqrt[3]{6S} + \sqrt[3]{36S^2} + 4x\sqrt[3]{6S} - 4y = 0; 4y = 4x^2 + \sqrt[3]{36S^2}; y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36S^2}}{4}.$$

Введем замену  $t = \frac{\sqrt[3]{36S^2}}{4}$ , тогда  $S = \frac{4}{3}t\sqrt{t}$ .

Отсюда отрезки касательных к параболе  $y = x^2 + t$  отсекают от параболы  $y = x^2$  криволинейную трапецию, площадь которой равна  $S = \frac{4}{3}t\sqrt{t}$ .

**Пример 1.4.** Найдите огибающую семейства прямых  $y = \alpha x + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ , где  $\alpha$  – параметр,  $|\alpha| \geq 1$ .

*Решение.* Данное уравнение удобно исследовать, используя дифференциальные уравнения. Продифференцируем уравнение семейства прямых по  $x$ , считая  $\alpha$  постоянным для каждой конкретной прямой:  $y' = \alpha$ . Подставим найденное значение параметра  $\alpha = y'$  в исходное уравнение. Получим дифференциальное уравнение семейства:  $y = xy' + \sqrt{(y')^2 - 1}$ . Для нахождения огибающей продифференцируем полученное равенство по  $y'$  и приравняем результат к нулю:

$0 = x + \frac{2y'}{2\sqrt{(y')^2 - 1}}$ ;  $x = -\frac{y'}{\sqrt{(y')^2 - 1}}$ ;  $x^2 = \frac{(y')^2}{(y')^2 - 1}$ ,  $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  (знак минус, так как  $x$  и  $y'$  противоположны). Подставим выражения для  $y'$  и  $\sqrt{(y')^2 - 1}$  обратно в дифференциальное

уравнение. Заметим, что  $\sqrt{(y')^2 - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

Тогда:  $y = x \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\sqrt{x^2 - 1}$ . Возводя обе части равенства в квадрат, получаем каноническое уравнение гиперболы:  $x^2 - y^2 = 1$ .

В итоге огибающей семейства прямых  $y = \alpha x + \sqrt{\alpha^2 - 1}$  является гипербола  $x^2 - y^2 = 1$ .

## 2. Восстановление семейства кривых по огибающей.

Нахождение огибающей для данного семейства линий – стандартная задача. Возникает вопрос, можно ли восстановить семейство кривых определенного типа для данной огибающей, то есть можно ли решить задачу, обратную рассмотренной выше.

В случае, когда семейство состоит из прямых достаточно составить уравнение касательной в произвольной точке  $x_0$  и заменить  $x_0$  на параметр.

**Пример 2.1.** ([1], с. 5). Найдите огибающую семейства прямых  $y = \alpha^3 x - \frac{3\alpha^2}{2}$  и восстановите семейство (прямых) по найденной огибающей.

*Решение.* Рассмотрим функцию  $f(x, y, \alpha) = \alpha^3 x - \frac{3\alpha^2}{2} - y$ . Находим производную  $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 3\alpha^2 x - 3\alpha$  и составляем систему

$$\begin{cases} \alpha^3 x - \frac{3\alpha^2}{2} - y = 0, \\ 3\alpha^2 x - 3\alpha = 0; \end{cases} \begin{cases} \alpha^3 x - \frac{3\alpha^2}{2} - y = 0, \\ \alpha(\alpha x - 1) = 0. \end{cases}$$

Если  $\alpha = 0$ , то мы имеем ось абсцисс, как геометрическое место особых точек. Если  $\alpha \neq 0$ , то  $\alpha = \frac{1}{x}$  и  $y = -\frac{1}{2x^2}$  – огибающая данного семейства. Составим уравнение касательной к графику полученной функции в произвольной точке  $x_0$ :  $y = -\frac{1}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0^3}(x - x_0) = -\frac{3}{2x_0^2} + \frac{x}{x_0^3}$ . Заменяем  $x_0$  на параметр  $\frac{1}{\alpha}$  и получаем изначально предложенное семейство прямых  $y = \alpha^3 x - \frac{3\alpha^2}{2}$ .

В случаях, когда исходное семейство не является семейством прямых для его восстановления будем пользоваться тем фактом, что в точках касания  $y$  кривых семейства и огибающей общая касательная.

**Пример 2.2** ([1], с. 5). Найдите огибающую семейства парабол  $y = \alpha x^2 + \frac{1}{\alpha} - \alpha$  и восстановите семейство (парабол) по найденной огибающей.

*Решение.* Умножим обе части данного уравнения на  $\alpha$  и рассмотрим его как квадратное относительно параметра  $(x^2 - 1)\alpha^2 - y\alpha + 1 = 0$ ;  $D = y^2 - 4x^2 + 4$ ;  $y^2 - 4x^2 + 4 = 0$ ;  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  – огибающая данного семейства.

Составим уравнение касательной к полученной гиперболы в произвольной точке  $x_0$ , выразив предварительно  $y$ . Рассмотрим ситуацию для  $y \geq 0$ :

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}; \quad y = 2\sqrt{x_0^2 - 1} + \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}(x - x_0) = \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}x - \frac{2}{\sqrt{x_0^2 - 1}}$$

Поскольку ветви огибающей симметричны относительно оси ординат, очевидно параболы семейства будут иметь вершины на этой оси, то есть иметь вид  $y = ax^2 + c$ . Составим уравнение касательной к параболе в общем виде в точке  $x_0$  и приравняем одноименные коэффициенты полученных прямых.

$$y = ax_0^2 + c + 2ax_0(x - x_0) = 2ax_0x - ax_0^2 + c.$$

$$\begin{cases} \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = 2ax_0, \\ -\frac{2}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = -ax_0^2 + c; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}}, \\ c = \frac{x_0^2 - 2}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}}; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}}x^2 + \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = \left| \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 1}} = \alpha \right| = \alpha x^2 + \frac{1}{\alpha} - \alpha.$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для отрицательных значений переменной  $y$ .

Таким образом, действительно можно восстанавливать семейства кривых различных типов по данной огибающей. При этом одна и та же кривая может быть огибающей для разного вида семейств. Например, парабола  $y = x^2$  может быть огибающей и для множества прямых, и для множества парабол, и для множества окружностей.

### 3. Эволюта как огибающая.

Если точка  $M(x, y)$  перемещается вдоль данной кривой, то соответствующий ей центр кривизны  $C(\xi, \eta)$ , вообще говоря, также описывает некоторую кривую [4, с. 578]. Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. Обратное, исходная кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

Огибающая может быть использована в качестве инструмента для проверки правильности нахождения эволюты для данных кривых, поскольку эволюта – это огибающая для семейства нормалей к данной эвольвенте.

Для нахождения параметрических уравнений эволюты используют формулы:

$\xi = x - \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}f'(x)$ ;  $\eta = f(x) + \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}$  (функция задана явно). Покажем, что получение уравнений эволюты с помощью формул и с помощью огибающей дает одинаковые результаты.

**Пример 3.1.** Найдите эволюту параболы  $y = ax^2$ .

*Решение.* Найдём сначала уравнение эволюты, используя формулы:

$$\xi = x - \frac{1+4a^2x^2}{2a}2ax = -4a^2x^3; \quad \eta = ax^2 + \frac{1+4a^2x^2}{2a} = \frac{1}{2a} + 3ax^2.$$

Исключим  $x$ :  $\xi^2 = 16a^4x^6$ ;  $(\eta - \frac{1}{2a})^3 = 27a^3x^6$ ;  $\xi^2 = \frac{16a}{27}(\eta - \frac{1}{2a})^3$ . Если воспользоваться зависимостью  $y$  от  $x$ , то имеем  $y = \frac{3}{4a}\sqrt[3]{4a^2x^2} + \frac{1}{2a}$ . Найдём теперь огибающую для нормалей данной параболы. Уравнение нормали в точке  $x_0$  имеет вид:

$$y = ax_0^2 - \frac{1}{2ax_0}(x - x_0) = -\frac{x}{2ax_0} + ax_0^2 + \frac{1}{2a}. \quad f(x, y, \alpha) = -\frac{x}{2a\alpha} + a\alpha^2 + \frac{1}{2a} - y;$$

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{x}{2a\alpha^2} + 2a\alpha.$$

Составляем систему:

$$\begin{cases} -\frac{x}{2a\alpha} + a\alpha^2 + \frac{1}{2a} - y = 0, \\ \frac{x}{2a\alpha^2} + 2a\alpha = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{x}{2a\alpha} + a\alpha^2 + \frac{1}{2a} - y = 0, \\ x = -4a^2\alpha^3. \end{cases}$$

Исключаем параметр, если  $\alpha = -\sqrt[3]{\frac{x}{4a^2}}$ , то

$$y = \frac{x}{2a\sqrt[3]{\frac{x}{4a^2}}} + a\sqrt[3]{\frac{x^2}{16a^4}} + \frac{1}{2a} = \frac{\sqrt[3]{4a^2x^2}}{2a} + \frac{\sqrt[3]{4a^2x^2}}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{3\sqrt[3]{4a^2x^2}}{4a} + \frac{1}{2a}.$$

Результаты совпали.

Итак, действительно через нахождение огибающей для нормалей эвольвенты можно проверить правильность найденной эволюты.

Доказано [3, стр. 585], что каждая эволюта имеет бесконечно много эвольвент, причем для каждых двух эвольвент выполняется условие: какую бы точку  $x_0$  не взяли на первой кривой, найдется точка  $x_1$  на второй кривой такая, что касательные в них будут параллельны и длина отрезка общей нормали в точках касания равна заданному числу. Назовем такие кривые **синхронными**. Тогда, если существуют, например, две квадратичные функции, графиками которых являются синхронные параболы, то графики этих функций имеют общую эволюту. Попробуем получить квадратичную функцию, график которой будет синхронной параболой для графика функции  $y = x^2$  при длине отрезка общей нормали в точках касания параллельных касательных равном 1.

Сначала выведем зависимость между коэффициентами линейных функций, графики которых параллельны и расстояние между которыми равно 1. Пусть даны две линейные функции  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ , графики которых параллельны. Очевидно,  $k_1 = k_2 = k$ . Найдем связь между коэффициентами  $b_1$  и  $b_2$ . Пусть  $b_2 < b_1 < 0$ . Уравнение их общей нормали, проходящей через начало координат имеет вид  $y = -\frac{1}{k}x$ . Нормаль пересекает первую прямую в точке  $A(-\frac{b_1k}{k^2+1}; \frac{b_1}{k^2+1})$ , а вторую в точке  $B(-\frac{b_2k}{k^2+1}; \frac{b_2}{k^2+1})$ . Поскольку расстояние между прямыми должно быть равно 1, имеем:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{b_2k}{k^2+1} - \frac{b_1k}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{k^2+1} - \frac{b_2}{k^2+1}\right)^2} = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{k^2+1}} = 1; \quad b_1 = \sqrt{k^2+1} + b_2.$$

Далее для квадратичной функции  $y = x^2$  попытаемся получить условие, при котором касательные к графику функции  $y = x^2$  в точке  $x_0$  и графику функции  $y = ax^2 - 1$  в точке  $x_1$  будут параллельны и расстояние между ними будет равно 1.

Уравнение касательной в точке  $x_0$  для функции  $y = x^2$  имеет вид  $y = 2x_0x - x_0^2$ , уравнение касательной в точке  $x_1$  для функции  $y = ax^2 - 1$  имеет вид  $y = 2ax_1x - ax_1^2 - 1$ . Тогда

$$\begin{cases} 2x_0 = 2ax_1, \\ -x_0^2 = \sqrt{4a^2x_1^2 + 1} - ax_1^2 - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = ax_1, \\ -a^2x_1^2 = \sqrt{4a^2x_1^2 + 1} - ax_1^2 - 1; \end{cases}$$

$$x_1^2(a - a^2) + 1 = \sqrt{4a^2x_1^2 + 1};$$

$$x_1^4(a - a^2)^2 + 2x_1^2(a - a^2) + 1 = 4a^2x_1^2 + 1;$$

$$x_1^2 = 0 \text{ или } x_1^2(a - a^2)^2 + 2(a - a^2) - 4a^2 = 0; \quad x_1^2 = 0 \text{ или } x_1^2 = \frac{6a-2}{a(a-1)^2}.$$

Очевидно, только в трех точках выполняется предложенное условие. Однако условие синхронности требует выполнения равенства для всех  $x$ , что приводит к противоречию в коэффициентах многочленов (так как многочлены разных степеней не могут тождественно совпадать более чем в конечном числе точек). Этого недостаточно для синхронности графиков. Таким образом, несмотря на то, что рассуждения приведены для частного случая, можно утверждать, что не существует двух квадратичных функций, графики которых синхронны, а, значит, не существует двух квадратичных функций, графики которых имеют общую эволюту.

Тем не менее, функции, графики которых будут синхронными для параболы  $y = x^2$  существуют. А, значит, существуют функции, графики которых будут иметь ту же эволюту, что и парабола  $y = x^2$ . Докажем это. Найдем нормаль.

$$y = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0) = -\frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2}; \quad x = 2x_0^3 + x_0 - 2x_0y.$$

Зафиксируем на нормали точку  $(x; y)$ , отстоящую от точки  $(x_0; x_0^2)$  на  $l$ .

$$(x - x_0)^2 + (y - x_0^2)^2 = l^2; \quad (2x_0^3 + x_0 - 2x_0y - x_0)^2 + (y - x_0^2)^2 = l^2;$$

$$(y - x_0^2)^2(4x_0^2 + 1) = l^2.$$

Рассмотрим  $y - x_0^2 < 0$ . Тогда при  $x_0 = t$  имеем:

$$y = t^2 - \frac{l}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}}; \quad x = 2t^3 + t - 2t(t^2 - \frac{l}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}}) = t + \frac{2lt}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Получена функция, заданная параметрически.

Используя пример 3.1., можно найти параметрические уравнения эволюты параболы  $y = x^2$ :

$\xi = -4x^3$ ;  $\eta = \frac{1}{2} + 3x^2$ . Докажем, что параметрические уравнения эволюты найденной функции имеют тот же вид. Для параметрически заданной функции параметрические уравнения эволюты могут быть найдены по формулам:

$$\xi = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}y'; \quad \eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}x'.$$

$$x' = 1 + \frac{2l}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}; \quad x'' = -3l(4t^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 8t = \frac{-24lt}{(4t^2+1)^{\frac{5}{2}}};$$

$$y' = 2t + \frac{4lt}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}; \quad y'' = 2 + 4l \frac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(4t^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 8t^2}{(4t^2+1)^3} = 2 + \frac{4l-32lt^2}{(4t^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\xi = t + \frac{2lt}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)^2 + ((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)^2 4t^2}{(4t^2+1)^3}}{\frac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left(2 + \frac{4l-32lt^2}{(4t^2+1)^{\frac{5}{2}}}\right) + \frac{24lt}{(4t^2+1)^{\frac{5}{2}}}\left(2t + \frac{4lt}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right)} \cdot \frac{2t((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= t + \frac{2lt}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)^3(4t^2+1)2t}{(4t^2+1)^3(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(4t^2+1)^4}{((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)\left(2(4t^2+1)^{\frac{5}{2}}+4l-32lt^2\right) + 48lt^2((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)}$$

$$= t + \frac{2lt}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)^3(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}2t}{((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)(2(4t^2+1)^{\frac{5}{2}}+4l(4t^2+1))} = t + \frac{2lt}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{((4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l)t}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= t + \frac{2lt - t(4t^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2lt}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = t - t(4t^2+1) = -4t^3.$$

Учитывая аналогию, имеем:

$$\eta = t^2 - \frac{l}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l}{2(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = t^2 + \frac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}+2l-2l}{2(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2t^2+4t^2+1}{2} = 3t^2 + \frac{1}{2}.$$

Подтверждение совпадения уравнений эволют квадратичной функции  $y = x^2$  и функции, которая была найдена, получено. В пособии [4] доказано, что у каждой эволюты есть бесконечно много эвольвент, но не приведено ни одного примера, подтверждающего этот факт. Предложенные выше рассуждения как раз таким примером и являются.

#### 4. Обратная задача эволют: алгоритм построения всех эвольвент по заданной эволюте.

Рассмотрим гладкую кривую  $\Gamma$  (эволюту), заданную параметрически  $X = X(t)$ ,  $Y = Y(t)$ . Для каждой точки  $M(t) = (X(t), Y(t))$  на  $\Gamma$  определим касательную прямую. Далее каждая точка  $M(t)$  сдвигается вдоль касательной прямой на расстояние, равное длине дуги от фиксированной точки  $t_0$  до

$t$ , увеличенное на константу  $C$ . При таком сдвиге получается новая кривая  $\gamma$ , для которой  $\Gamma$  является эволютой. Это происходит потому, что сдвиг вдоль касательной прямой на расстояние, равное длине дуги, гарантирует, что нормаль к  $\gamma$  будет совпадать с касательной к  $\Gamma$ .

Тогда все её эвольвенты задаются параметрическими уравнениями:

$$x(t) = X(t) - (s(t) + C) \cdot \frac{X'(t)}{\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}}, \quad y(t) = Y(t) - (s(t) + C) \cdot \frac{Y'(t)}{\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}}, \quad (4.1)$$

где  $s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2} dt$  — длина дуги эволюты от фиксированной точки  $t_0$  до точки  $t$ , а  $C \in \mathbb{R}$  — произвольная постоянная.

*Доказательство.* Рассмотрим точку  $M(t) = (X(t), Y(t))$  на эволюте  $\Gamma$ . Вектор касательной к  $\Gamma$  в этой точке равен  $m(t) = (X'(t), Y'(t))$ . Единичный касательный вектор:  $T(t) = \frac{(X'(t), Y'(t))}{\sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}}$ . Определим точку  $P(t) = (x(t), y(t))$  как сдвиг точки  $M(t)$  вдоль касательной на расстояние  $s(t) + C$  в направлении, противоположном движению по кривой (знак минус в (4.1)). Найдём вектор касательной к  $\gamma$ . Обозначим  $v(t) = \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2}$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X'(t) - \frac{d}{dt}(s(t) + C) \cdot \frac{X'(t)}{v(t)} - (s(t) + C) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{X'(t)}{v(t)} \right) = \\ &= X'(t) - v(t) \cdot \frac{X'(t)}{v(t)} - (s(t) + C) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{X'(t)}{v(t)} \right) = 0 - (s(t) + C) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{X'(t)}{v(t)} \right). \end{aligned}$$

Аналогично:  $\frac{dy}{dt} = -(s(t) + C) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{Y'(t)}{v(t)} \right)$ .

Поскольку  $T(t) = \left( \frac{X'(t)}{v(t)}, \frac{Y'(t)}{v(t)} \right)$  — единичный вектор, его производная  $\frac{d}{dt} T(t)$  перпендикулярна  $T(t)$  (производная единичного вектора всегда ортогональна самому вектору). Следовательно, вектор касательной к  $\gamma$  перпендикулярен касательной к  $\Gamma$ . Из формул (4.1) следует, что вектор  $(X(t) - x(t), Y(t) - y(t))$  является коллинеарным касательному вектору  $(X'(t), Y'(t))$  к  $\Gamma$ . Это означает, что точка  $(X(t), Y(t))$  лежит на прямой, проходящей через  $(x(t), y(t))$  и направленной вдоль касательной к  $\Gamma$ . Вместе с перпендикулярностью касательных это гарантирует, что нормаль к  $\gamma$  совпадает с касательной к  $\Gamma$ .

Отсюда следует, что все нормали к  $\gamma$  касаются  $\Gamma$ , а  $\Gamma$  является их огибающей. По определению, это означает, что  $\Gamma$  — эволюта  $\gamma$ , а  $\gamma$  — эвольвента  $\Gamma$ .

Каждому значению  $C$  соответствует своя эвольвента; при  $C_1 \neq C_2$  эвольвенты различны и являются «синхронными» в смысле главы 3 (их касательные в соответствующих точках параллельны, а расстояние между точками вдоль общей нормали постоянно и равно  $|C_1 - C_2|$ ).

**Пример 4.1.** Восстановите параболу  $y = x^2$  по её эволюте.

*Решение.* Эволюта параболы  $y = x^2$  задаётся параметрическими уравнениями:

$$X(t) = -4t^3, Y(t) = 3t^2 + \frac{1}{2}.$$

Это полукубическая парабола, поскольку исключение параметра  $t$  даёт уравнение  $27(Y - \frac{1}{2})^2 = 16X^3$ . Вычислим производные функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ :  $X'(t) = -12t^2$ ,  $Y'(t) = 6t$ . Тогда  $v(t) = \sqrt{((-12t^2)^2 + (6t)^2)} = 6|t|\sqrt{4t^2 + 1}$ . Для  $t \geq 0$  имеем  $v(t) = 6t\sqrt{4t^2 + 1}$ . Вычислим длину дуги, выбирая  $t_0 = 0$ :  $s(t) = \int_0^t 6\tau\sqrt{4\tau^2 + 1} d\tau = \frac{1}{2}((4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1)$ . Подставим полученные выражения для  $X'(t)$ ,  $Y'(t)$ ,  $s(t)$  в равенства (4.1) при  $C = \frac{1}{2}$ . После упрощений получаем:  $x(t) = t$ ,  $y(t) = t^2$ , то есть параметрическое уравнение исходной параболы  $y = x^2$ . При других значениях  $C$  получаются другие эвольвенты той же полукубической параболы.

В итоге по заданной эволюте (полукубической параболе) восстановлена исходная кривая — парабола:  $y = x^2$ .

**Закключение.** Таким образом, понятие огибающей даёт широкое поле для исследования за пределами решения стандартных задач. В приведенной работе:

1. Сформулированы новые геометрические свойства некоторых известных кривых с помощью метода огибающих.

2. Продемонстрирована возможность восстановления семейств линий определенного типа по известной огибающей (решение обратной задачи).

3. Установлено, что эволюта кривой является огибающей семейства нормалей к ней, что может служить инструментом проверки расчетов.

4. Доказано, что не существует двух различных квадратичных функций, графики которых имеют общую эволюту, то есть опровергнута гипотеза о синхронных параболах, и найдены непараболические функции, синхронные с параболой.

5. Разработан и обоснован алгоритм построения всех эвольвент по заданной эволюте.

Полученные результаты могут найти применение в курсах дифференциальной геометрии, а также в прикладных задачах компьютерной графики и проектирования механизмов.

**Список использованных источников:**

1. Болтянский В.Г. Огибающая. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №3, 1987 – С. 2-7.
2. Толстов Г.П. К отысканию огибающей семейства плоских кривых, УМН, 1952, том 7, выпуск 4 – С. 173-179.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1 / предисл. и примеч. А. А. Флоринского. — 8-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 680 с.

UDC 514.752.6

## PROPERTIES OF ENVELOPES OF FAMILIES OF CURVES

*Lopata D. A., student*

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics  
Minsk, Republic of Belarus*

*Primecheva Z.N. – PhD in Physics and Mathematics*

**Abstract.** This paper investigates the properties of envelopes of families of curves and the solution of inverse problems. Methods for finding envelopes and reconstructing families of curves from them are considered. It is shown that the evolute is the envelope of normals, which is used to verify calculations. The hypothesis about synchronous quadratic functions is refuted, but functions with a common evolute are found. An algorithm for constructing all involutes from a given evolute is proposed.

**Keywords:** Envelope, family of curves, evolute, involute, inverse problem, normal, differential equation.