

УДК 621.833

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРОФИЛЯ ЗУБА: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЬВЕНТЫ И ЦИКЛОИДАЛЬНЫХ КРИВЫХ

Савицкая А. Б., Романчук Е. В., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л. В. – старший преподаватель

Аннотация. В работе проведен сравнительный анализ двух основных типов профилей зубчатых передач – эвольвентного и циклоидального. Для каждой кривой получены параметрические уравнения, вычислена кривизна, исследованы её свойства. Показано, что эвольвента обладает монотонно убывающей кривизной, отсутствием особых точек и устойчивостью к изменению межосевого расстояния, тогда как циклоидальные кривые имеют периодическую кривизну и точки возврата. Сделан вывод об оптимальности эвольвентного профиля для большинства машиностроительных приложений.

Ключевые слова. Эвольвента, циклоида, эпициклоида, гипоциклоида, кривизна, зубчатое зацепление, профиль зуба.

Введение. Зубчатые передачи являются одним из наиболее распространённых механизмов в современной технике. Они применяются в устройствах различного назначения — от компактных часовых механизмов и измерительных приборов до мощных промышленных установок и транспортных систем. Форма зуба напрямую влияет на плавность работы механизма, уровень износа и точность передачи движения.

Исторически сложились два основных типа профилей: эвольвентный и циклоидальный. В современном машиностроении практически повсеместно применяется эвольвента. Цель работы – выявить, почему именно эта кривая является наиболее распространённой, и доказать гипотезу об оптимальности эвольвентного профиля для большинства зубчатых передач благодаря монотонному изменению кривизны, устойчивости к изменению межосевого расстояния и технологичности изготовления. Рассмотрим первый тип профиля: эвольвентный.

Эвольвента – это траектория любой точки прямой линии, перекатываемой по окружности с радиусом R без скольжения. Параметрические уравнения эвольвенты имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = R(\cos t + t \sin t), \\ y(t) = R(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t > 0 \quad (1)$$

Для вычисления кривизны найдём первую и вторую производные:

$$x'(t) = R t \cos t, \quad y'(t) = R t \sin t \quad (2)$$

Кривизна плоской кривой, заданной параметрически, определяется по формуле:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Вычислим числитель:

$$x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = R^2 t^2 \quad (4)$$

Вычислим знаменатель:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = R^2 t^2, \quad \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}} = R^3 t^3 \quad (5)$$

Таким образом, кривизна эвольвенты:

$$\kappa(t) = \frac{1}{Rt} \quad (6)$$

Из выражения видно, что кривизна обратно пропорциональна параметру t . Найдём производную:

$$\kappa'(t) = -\frac{1}{Rt^2} < 0 \text{ (при всех } t > 0) \quad (7)$$

Следовательно, $\kappa(t)$ строго убывает. При $t \rightarrow \infty$ кривизна стремится к нулю, следовательно, профиль становится всё более пологим.

Вывод: Эвольвента имеет гладкое, монотонно убывающее изменение кривизны. Отсутствие экстремумов исключает локальные концентрации напряжений, характерные для некоторых других типов профилей.

Рассмотрим циклоидальные кривые.

Для того чтобы оценить преимущества эвольвенты, необходимо рассмотреть свойства альтернативных профилей, прежде всего эпициклоиды и гипоциклоиды.

Эпициклоида – траектория точки окружности радиуса r , катящейся без скольжения по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R . Введём обозначение $k = \frac{R+r}{r}$, где k – коэффициент отношения радиусов. Тогда параметрические уравнения эпициклоиды:

$$\begin{cases} x(t) = (R+r)\cos t - r\cos(kt), \\ y(t) = (R+r)\sin t - r\sin(kt). \end{cases} \quad (8)$$

Первая и вторая производные:

$$\begin{cases} x'(t) = -(R+r)\sin t + rk\sin(kt), \\ y'(t) = (R+r)\cos t - rk\cos(kt), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x''(t) = -(R+r)\cos t + rk^2 \cos(kt) \\ y''(t) = -(R+r)\sin t + rk^2 \sin(kt). \end{cases} \quad (10)$$

После подстановки в формулу кривизны и упрощений получаем:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{1}{2r\sqrt{r(R+r)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{R}{r}t\right)}}, \cos\left(\frac{R}{r}t\right) \neq 1 \\ \cos\left(\frac{R}{r}t\right) &\neq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Кривизна эпициклоиды периодична с периодом $T = \frac{2\pi r}{R}$.

В точках, где $\cos\left(\frac{R}{r}t\right) = 1$, знаменатель обращается в ноль, кривизна стремится к бесконечности – это точки возврата.

Минимальная кривизна достигается при $\cos\left(\frac{R}{r}t\right) = -1$:

$$\kappa_{min} = \frac{1}{2\sqrt{2r(R+r)}} \quad (12)$$

Гипоциклоида – траектория точки окружности, катящейся по внутренней стороне неподвижной окружности. Параметрические уравнения гипоциклоиды:

$$\begin{cases} x(t) = (R-r)\cos t + r\cos\left(\frac{R}{r}t\right), \\ y(t) = (R-r)\sin t - r\sin\left(\frac{R}{r}t\right). \end{cases} \quad (13)$$

Анализ кривизны даёт аналогичную картину: периодичность, точки возврата, немонотонность.

Для численного исследования свойств эвольвенты и циклоидальных кривых была разработана программа на языке C++. Программа вычисляет координаты точек кривых и их геометрические характеристики, которые используются для построения графиков и анализа поведения кривизны. Графики представлены на рисунке 2.

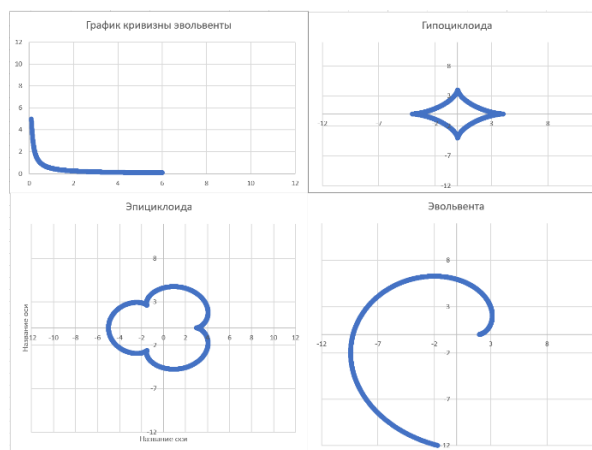


Рисунок 2 – Графики кривых

Вывод: Циклоидальные кривые имеют сложное, периодическое распределение кривизны с бесконечными всплесками в точках возврата. Это может приводить к возникновению зон повышенных напряжений, если такие участки попадают в рабочую зону зацепления.

На основе полученных результатов проведём сравнительный анализ эвольвентного и циклоидального профилей зубьев по основным характеристикам. Результаты сравнения свойств кривизны представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнение свойств кривизны эвольвенты и циклоидальных кривых

Характеристика	Эвольвента	Циклоидальные кривые
Вид функции	Спиралевидная кривая	Периодическая
Монотонность	Строго убывающая	Немонотонная
Особые точки	Нет	Точки возврата
Поведение на бесконечности	Изменяется плавно	Колебания, резко изменяется

Вывод: Анализ таблицы показывает, что кривизна эвольвенты изменяется плавно и монотонно, тогда как для циклоидальных кривых характерно периодическое изменение кривизны и наличие точек возврата. Это свидетельствует о большей геометрической устойчивости эвольвентного профиля и снижении вероятности возникновения зон повышенных напряжений в процессе работы передачи.

Исследуем устойчивость к изменению параметров:

1) Для эвольвенты нормаль в точке контакта всегда проходит через одну и ту же точку – полюс зацепления. Это свойство делает передачу нечувствительной к небольшим изменениям межосевого расстояния.

2) Для циклоидальных профилей линия зацепления представляет собой дугу окружности. Любое изменение межосевого расстояния нарушает закон зацепления, вызывая пульсации угловой скорости и повышенный износ.

3) Эвольвентные зубья нарезаются методом обкатки с использованием простого инструмента (червячная фреза, гребёнка). Это обеспечивает высокую производительность и низкую стоимость массового производства.

4) Циклоидальные профили требуют более сложного инструмента и точной настройки станков, что делает их производство дороже.

Под оптимальностью профиля зуба в данной работе понимается совокупность следующих характеристик: устойчивость кинематических параметров передачи, технологичность изготовления, плавность изменения кривизны и надёжность работы механизма.

На основе рассмотренных свойств эвольвенты и циклоидальных кривых проведём их сравнение по основным эксплуатационным характеристикам. Результаты сравнения представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение эксплуатационных характеристик эвольвентного и циклоидального профилей зубьев

Критерий	Эвольвента	Циклоидальные кривые
Технологичность	Высокая	Низкая
Чувствительность к монтажу	Низкая	Высокая
Износостойкость	Средняя	Высокая
Область применения	Массовые механизмы(машиностроение)	Часы, приборы, компрессоры, насосы

Вывод: Сравнение эксплуатационных характеристик показывает, что эвольвентный профиль обладает высокой технологичностью и устойчивостью к изменениям параметров установки, что делает его предпочтительным для массового производства зубчатых передач. Циклоидальные профили сохраняют преимущества в специальных механизмах, где требуется высокая точность и минимальное трение.

Полученные результаты позволяют сформулировать основные выводы о преимуществах и ограничениях исследуемых профилей.

Заключение. Эвольвента имеет простую аналитическую форму, кривизна монотонно убывает, нет особых точек. Передача устойчива к погрешностям монтажа, технологична в массовом производстве. Циклоидальные кривые (эпициклоида, гипоциклоида) обладают периодической кривизной, имеют точки возврата с бесконечной кривизной. Профили чувствительны к изменению межосевого расстояния, сложнее в изготовлении. Эвольвента является технологическим оптимумом: она не идеальна по контактным напряжениям, но её математические свойства (инвариантность к межосевому расстоянию и простота нарезания) делают её доминирующей в общем машиностроении. Циклоидальный профиль сохраняет значение в точных приборах (часы, счётчики) и в специальных механизмах (героторные насосы, компрессоры), где важны минимальное трение и компактность. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании зубчатых передач и выборе оптимального профиля зуба.

Список использованных источников:

1. Леонтьев, Н.В. *Механические передачи на основе эпициклоиды и гипоциклоиды* / Н.В. Леонтьев, О.Г. Мугин, О.О. Мугин // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – С. 1-3.
2. Анципорович, П.П. *Нарезание цилиндрических эвольвентных зубчатых колес и построение схемы зубчатого зацепления* : учеб.-метод. пособие к лаб. работам по дисциплине «Теория механизмов, машин и манипуляторов» / П.П. Анципорович, В.К. Акулич, Е.М. Дубовская. – 2-е изд., испр. – Минск : БНТУ, 2009. – 46 с.
3. Лыкова, А.Б. *Классификация видов зубчатых передач и их сравнительный анализ с ременными передачами* / А.Б. Лыкова, М.В. Астафьева // Наука и Образование : материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Инженерное обеспечение инновационных технологий в АПК». – Мичуринск, 2024. – Т. 7, № 4. – 8 с.
4. Берман, Г.Н. *Циклоида* / Г.Н. Берман. – 2-е изд. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1954. – 116 с.

UDC 621.833

OPTIMALITY OF THE TOOTH PROFILE: A COMPARATIVE ANALYSIS OF INVOLUTE AND CYCLOIDAL CURVES

Savitskaya A.B., Romanchuk E.V. students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

L. V. Lobanok — Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics

Annotation. The paper presents a comparative analysis of two main types of gear tooth profiles – involute and cycloidal. Parametric equations are derived for each curve, curvature is calculated, and its properties are studied. It is shown that the involute possesses monotonically decreasing curvature, no singular points, and stability to changes in center distance, while cycloidal curves exhibit periodic curvature and cusps. The conclusion is made about the optimality of the involute profile for most mechanical engineering applications.

Keywords. Involute, cycloid, epicycloid, hypocycloid, curvature, gear engagement, tooth profile.