

УДК 530.191

## СИСТЕМЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Савинов А.В., Авраменко Р.А., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов В.Я. – канд. физ.- мат. наук, доцент

**Аннотация.** В данной работе были исследованы возможности аппарата фрактальной интерполяции, с использованием генетического алгоритма и было продемонстрировано его преимущество при моделировании сложных систем, выходящих за рамки традиционной евклидовой геометрии.

**Ключевые слова.** Фракталы, генетический алгоритм, IFS, аттрактор, интерполяция, сложные системы, аффинное преобразование, численный анализ, моделирование систем.

**Введение.** Классическая евклидова геометрия и аппарат элементарных функций традиционно служат фундаментом для анализа данных и моделирования окружающего мира. Они прекрасно описывают рукотворные объекты и гладкие процессы, обладая важным свойством: при достаточном увеличении их графики локально стремятся к прямым линиям, а их фрактальная размерность всегда равна единице. В классическом анализе для экспериментальных данных вида

$$\{(x_i, F_i)\}_{i=0}^N, \quad (1)$$

чаще всего используются именно такие евклидовы приближения, например, метод наименьших квадратов или полиномиальная интерполяция.

Однако географические и природные кривые, такие как береговые линии и рельеф, характеризуются высокой степенью изломанности и статистическим самоподобием. Каждая часть такой кривой подобна всей структуре (но не является ее точной копией), а измеряемая длина не является инвариантной величиной и зависит от масштаба измерения [1]. Это свидетельствует о том, что природные объекты не могут быть адекватно описаны в рамках классической евклидовой геометрии и требуют использования фрактальных моделей.

В связи с этим возникает необходимость в использовании нового подхода – фрактальных интерполяционных функций. В отличие от классических методов, фрактальная интерполяция позволяет не просто провести кривую через заданные экспериментальные точки, но и смоделировать сложную внутреннюю структуру данных на любых масштабах.

**Основные определения.** Математической основой системы является полное метрическое пространство  $(X, d)$ . В контексте работы и основных задач, связанных с фрактальной интерполяцией, чаще всего рассматривают евклидово пространство  $R^n$ .

Отображение  $f: X \rightarrow X$  называется сжимающим, если существует константа  $s \in [0, 1)$ , называемая коэффициентом сжатия, такая что для любых  $x, y \in X$ :

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y). \quad (2)$$

Это свойство гарантирует, что преобразование уменьшает расстояние между любыми точками множества, что является критическим для сходимости итерационного процесса [1].

Введем определение гиперболической системы итерируемых функций (IFS). IFS – это конечный набор сжимающих отображений  $\omega_n: X \rightarrow X$  с соответствующими коэффициентами сжатия  $s_n$  для  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  [2]. Для большего удобства введем обозначение системы  $\{X; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ .

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть оператор  $W$  – это сжимающее отображение в метрике Хаусдорфа  $(\mathcal{H}(X), h)$  [3], с коэффициентом сжатия  $s$ . Тогда, согласно теореме Банаха о неподвижной точке, существует единственное множество  $A \in \mathcal{H}(X)$ , такое что

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(A). \quad (3)$$

Данное множество  $A$  называется *аттрактором* системы итерируемых функций.

Исходя из формулы (3), множество  $A$  является объединением частей, подобных  $A$ , следовательно, аттрактор IFS является фракталом.

В теории итерационных функциональных систем выделяют два базовых алгоритма построения аттрактора: детерминированный алгоритм и случайный алгоритм [2].

**1. Детерминированный алгоритм.** Пусть задана IFS  $\{X; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  на полном метрическом пространстве. Выбирается начальное компактное множество  $A_0 \subset X$ , после чего строится последовательность

$$A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^k w_i(A_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

тогда  $A_k$  в метрике Хаусдорфа сходится к аттрактору  $A$ , удовлетворяющему условию (3). Алгоритм обеспечивает точное приближение аттрактора, однако характеризуется высокой вычислительной сложностью из-за экспоненциального роста числа элементов.

**2. Случайный алгоритм.** Пусть задана IFS  $\{X; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  на полном метрическом пространстве и вероятности  $p_i > 0$ , где  $i = 1..N$  и  $\sum p_i = 1$ . Выбирается начальная точка  $x_0 \in X$ , далее рекурсивно и независимо определяется последовательность

$$x_n \in w_1(x_{n-1}), w_2(x_{n-1}), \dots, w_N(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Причем  $x_n = w_i(x_{n-1})$  с вероятностью  $p_i$ . При  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $x_n$  с вероятностью 1 заполняет аттрактор IFS. Данный метод отличается высокой вычислительной эффективностью, низкими требованиями к памяти и простотой реализации, что делает его особенно удобным для визуализации фрактальных структур.

В данной работе используется **случайный алгоритм** ввиду его высокой вычислительной эффективности и низких требований к памяти.

Представление исследуемого набора данных осуществляется через аттрактор системы итерируемых функций, задаваемый набором аффинных преобразований  $\omega_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = ax + b, \\ y' = cx + dy + e. \end{cases} \quad (6)$$

Коэффициенты преобразования  $a_n$  и  $b_n$  однозначно определяются из условия линейного отображения глобального базового интервала  $[x_0, x_N]$  на локальный интервал  $[x_n, x_{n+1}]$ , соответствующий шагу дискретизации данных:

$$a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_N - x_0}, b_n = x_n - a_n x_0. \quad (7)$$

Параметр  $d$  ( $|d| < 1$ ) выступает в качестве локального коэффициента вертикального сжатия. В отличие от систем с фиксированным сжатием, в предложенной модели параметр  $d_n$  подбирается эволюционно для каждого сегмента в рамках динамически рассчитываемых границ  $[d_{min}, d_{max}]$ . Это позволяет гарантировать, что концы генерируемых фрактальных сегментов не выходят за пределы узловых точек интерполяции. Оставшиеся параметры  $c_n$  и  $e_n$  также являются свободными и определяют фрактальную размерность и изрезанность аттрактора.

**Применение генетического алгоритма.** Для решения задачи идентификации свободных параметров  $(c_n, d_n, e_n)$  в рамках системы итерируемых функций эффективно применение генетического алгоритма (ГА), способного проводить глобальный поиск в многомерных и невыпуклых пространствах. Выбор именно эволюционного подхода, а не классических градиентных методов оптимизации, продиктован спецификой решаемой обратной задачи: целевая функция носит сложный нелинейный характер и содержит множество локальных минимумов, что делает применение градиентных методов неэффективным. В предложенной модели каждое потенциальное решение кодируется в виде особи, содержащей набор искоемых коэффициентов аффинных преобразований, а итерационный процесс имитирует механизмы естественной селекции, позволяя алгоритму надежно адаптироваться к аппроксимируемой структуре.

Основным критерием приспособленности индивидов выступает минимизация функционала среднеквадратичного отклонения

$$F = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (y_{attr,i} - y_{interp}(x_i))^2, \quad (8)$$

где  $y_{attr,i}$  – ординаты точек сгенерированного аттрактора;  $y_{interp}(x_k)$  – значение, полученное линейной интерполяцией исходных экспериментальных данных в точке  $x_k$ . В целевую функцию также введен механизм пенализации: если точки аттрактора выходят за границы исходного интервала  $[x_{min}, x_{max}]$ , к ошибке прибавляется высокий штрафной коэффициент, отсеивая физически некорректные решения.

Решение проблемы эволюции и смены поколений в работе базируется на трех ключевых операторах и оптимизациях:

1. *Турнирная селекция*. Случайным образом выбираются  $k$  индивидов, и из них родителем становится особь с наименьшей ошибкой. Турнирная селекция поддерживает высокое генетическое разнообразие. Даже у особей с низким параметром приспособленности есть шанс передать свои гены, если они попадут в слабый турнир. Это предотвращает преждевременную сходимость алгоритма к локальному минимуму.

2. *Скрещивание BLX- $\alpha$* . Метод анализирует значения генов двух родителей ( $p_1$  и  $p_2$ ) и расстояние между ними  $d = p_1 - p_2$ . Ген потомка генерируется как случайное вещественное число в расширенном интервале:  $[\min(p_1, p_2) - \alpha d, \max(p_1, p_2) + \alpha d]$ . Это позволяет алгоритму генерировать новые промежуточные значения, плавно исследуя пространство вокруг успешных родителей. Расширение на  $\alpha$  предотвращает стягивание популяции в одну точку.

3. *Концепция имитации отжига*. В алгоритм внедрен счетчик стагнации. Если ошибка лучшей особи не уменьшается в течение заданного числа поколений, границы мутации принудительно расширяются. Сильная мутация с резким изменением параметров выталкивает популяцию из локальной ямы, заставляя исследовать новые области пространства, после чего поиск снова сужается для точной настройки.

**Основная часть.** Исследование посвящено разработке метода фрактальной интерполяции для аппроксимации нерегулярных и зашумленных данных с использованием аттрактора системы итерированных функций (IFS). В рамках предложенного подхода функция представляется набором аффинных преобразований, где вертикальные параметры и коэффициент сжатия являются ключевыми факторами, определяющими фрактальную размерность и структурные  $d$  свойства модели. Генерация аппроксимирующего множества точек реализуется через случайный итерационный алгоритм, что позволяет с высокой точностью воссоздавать сложную геометрию исходного сигнала на любых масштабах.

Для идентификации оптимальных параметров системы применяется генетический алгоритм, осуществляющий глобальный поиск коэффициентов в многомерном пространстве на основе минимизации среднеквадратичного отклонения от исходных данных. Эволюционный процесс включает адаптивные механизмы мутации и селекции, обеспечивающие устойчивость к локальным минимумам и эффективную настройку модели.

В качестве исследуемого набора данных использовалась дискретная выборка точек, задающая профиль реального природного объекта, обладающего статистическим самоподобием, что позволяет рассматривать его в рамках фрактального подхода.

**Результаты и их обсуждение.** В ходе численного эксперимента была проведена апробация разработанного алгоритма на задаче интерполяции профиля горного массива, характеризующегося высокой степенью нерегулярности, при этом были описаны проблемы и их решения.

Для подтверждения эффективности разработанного алгоритма в задачах моделирования природных объектов был выбран *профиль горы Эль-Кахон*, изображенный на рисунке 1. Данный объект является классическим примером фрактальной геометрии, где гладкая интерполяция неизбежно теряет микрорельеф, важный для анализа структуры поверхности.

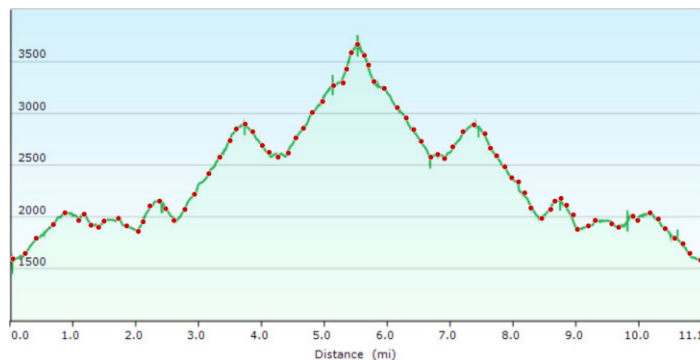


Рисунок 1 – Исходный набор точек горы Эль-Кахон

Методика подготовки данных:

1. В качестве источника использовалась цифровая схема скального маршрута.
2. Методом дискретизации графического профиля был извлечен массив опорных точек, имитирующих геодезические данные.

В процессе первичной апробации алгоритма на данных горного маршрута была выявлена проблема *аппроксимационной неустойчивости*. Она проявлялась в виде сильных вертикальных выбросов аттрактора, значительно выходящих за границы исходных экспериментальных данных. Это можно объяснить высокой изменчивостью рельефа. При попытке аппроксимации немонотонного участка, содержащего одновременно крутой подъем и спуск, единым аффинным преобразованием возникает математический конфликт при оптимизации параметров. Для достижения узловых точек на границах интервала алгоритм вынужден расширять пространство поиска, допуская экстремальные значения коэффициентов  $c$  и  $d$ . Это приводит к появлению выбросов и преждевременной сходимости алгоритма к локальным минимумам. Результаты первичной интерполяции изображены на рисунке 2.

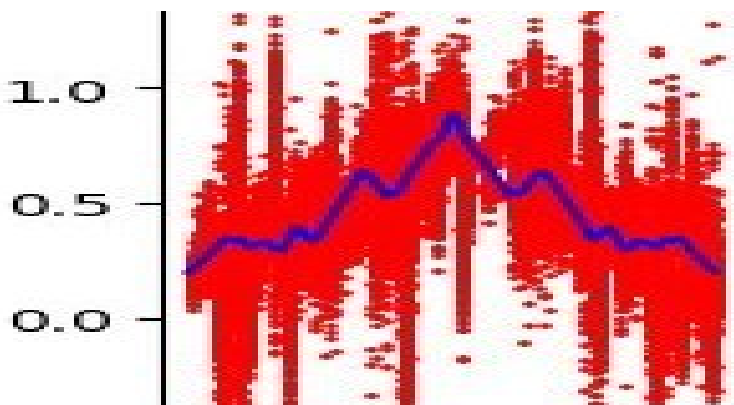


Рисунок 2 – Первая попытка интерполяции

Для решения данной проблемы и повышения робастности алгоритма в работе был внедрен метод предварительной *кусочно-монотонной сегментации исходного профиля* [5]. Исходный массив геодезических данных разбивается на непересекающиеся подынтервалы, характеризующиеся строгим сохранением знака первой производной участка тренда:

1. *Участки подъема*: где производная тренда  $\frac{dy}{dx} > 0$
2. *Участки спуска*: где производная тренда  $\frac{dy}{dx} < 0$

Для каждого из таких участков алгоритм применялся независимо с уточненными границами поиска параметров. Данный подход позволяет локализовать применение IFS-преобразований на однородных участках с одинаковой структурой. Это ограничивает диапазон параметров и предотвращает возникновение выбросов. В результате, как видно на представленном графике, приведенном на рисунке 3, достигается стабилизация, исключается проблема взаимного наложения фрактальных ветвей, а генетический алгоритм демонстрирует устойчивую сходимость к глобальному оптимуму, сохраняя естественное статистическое самоподобие микрорельефа.

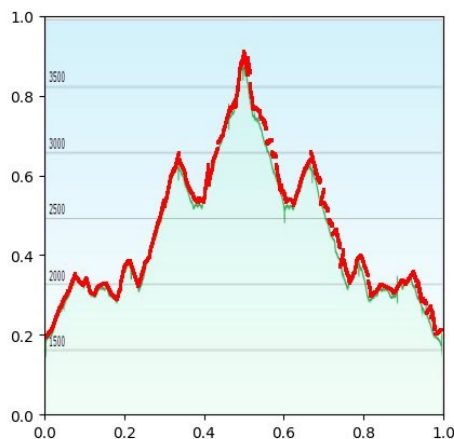


Рисунок 3 – Интерполяция с сегментацией профиля

Теперь проведем сравнительный анализ со стандартной моделью кусочно-линейной аппроксимации, представленной на рисунке 4.

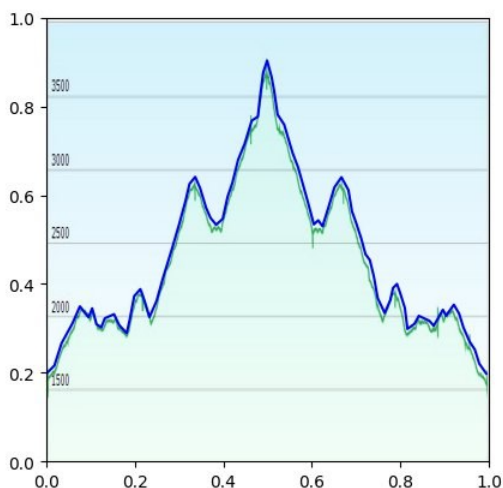


Рисунок 4 – Пример кусочно-линейной аппроксимации исходного набора точек

В отличие от стандартной кусочно-линейной аппроксимации, которая формирует упрощенную евклидову геометрию и неизбежно теряет информацию о микрорельефе между узлами предложенный метод фрактальной интерполяции, позволяет восстановить стохастическую природу и самоподобие объекта. За счет адаптивного подбора параметров сжатия  $d_i$  с помощью генетического алгоритма и предварительной сегментации данных на фазы подъема и спуска, модель не просто соединяет экспериментальные точки, а генерирует математически обоснованную изрезанность, соответствующую реальной морфологии горного массива. Это обеспечивает качественный переход от формального сглаживания данных к глубокому структурному моделированию сложных природных систем.

Для численной демонстрации эффективности фрактального подхода при интерполяции данных со сложной внутренней структурой был проведен следующий эксперимент. Был выбран некоторый участок горного профиля, рассмотренного выше, и он был представлен в виде достаточно плотного набора дискретных точек, аппроксимирующей его геометрия с высокой точностью. Была посчитана длина кривой, порожденная данным набором точек. Результат:  $0.6345334113462228$ . В рамках данного эксперимента будем считать полученное приближение реальной длины участка горы эталонным. Получившаяся кривая изображена на рисунке 5.

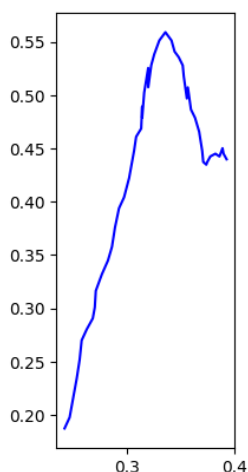


Рисунок 5 – Кривая, задающая эталонное приближение участка горного профиля

Затем был выбран тот же участок профиля, но представленный существенно менее плотным набором точек. На основе этого набора были построены два приближения: классическое – с использованием линейной интерполяции, и фрактальное – на основе системы итерируемых функций. Линейное и фрактальное приближения представлены на рисунках 6 и 7, соответственно.

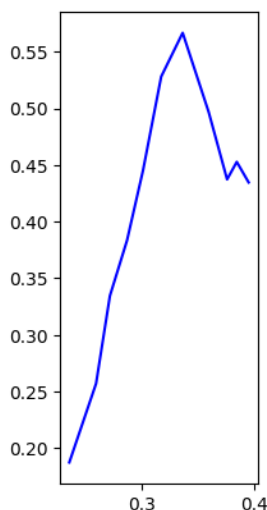


Рисунок 6 – Приближение участка горного профиля линейной интерполяцией

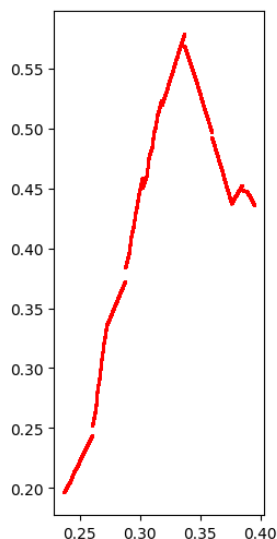


Рисунок 7 – Приближение участка горного профиля фрактальной интерполяцией

Для линейной интерполяции длина профиля составила  $0.5678962361024646$ . При этом фрактальное приближение дало значение длины  $0.6204669400746712$ , что значительно ближе к эталонному. Это связано с тем, что линейная интерполяция сглаживает мелкомасштабные неровности рельефа и не учитывает его сложную геометрическую структуру, а фрактальная модель способна воспроизводить статистическое самоподобие и учитывать геометрическую сложность профиля даже при ограниченном числе исходных точек.

**Заключение.** В работе разработан и исследован метод фрактальной интерполяции нерегулярных данных на основе систем итерируемых функций в сочетании с генетическим алгоритмом оптимизации параметров. В отличие от традиционных методов, ориентированных на гладкие аппроксимации, предложенный подход позволяет моделировать внутреннюю структуру сигнала, включая его стохастическую и самоподобную природу.

Ключевым результатом является выявление и устранение эффекта аппроксимационной неустойчивости, возникающего при обработке данных с высокой изменчивостью. Предложенная стратегия сегментации профиля на монотонные участки позволила существенно стабилизировать процесс оптимизации и исключить паразитные выбросы аттрактора.

Проведённые численные эксперименты показали, что интеграция IFS и генетического алгоритма формирует универсальный инструмент для моделирования сложных геометрических структур, превосходящий классические методы по способности сохранять морфологические особенности данных.

Разработанный подход может быть применён в задачах геоинформационного анализа, компьютерной графики, обработки сигналов и моделирования природных объектов.

**Список использованных источников:**

1. *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* / B. Mandelbrot // *Science*. – 1967. – Vol. 156, № 3775. – P. 636–638.
2. *Barnsley M. Fractals Everywhere* / M. Barnsley. – San Diego : Academic Press, 1993. – 533 p.
3. Морозов, А.Д. *Введение в теорию фракталов* / А.А. Морозов. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
4. *David E. Goldberg Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning* / Goldberg E. David. – Massachusetts : Academic Press, 1989. – 432 p.
5. *Fractal Polynomial Interpolation* / M. A. Navascués // *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*. – 2005. – Vol. 25, № 2. – P. 401–418.

UDC 530.191

## ITERATED FUNCTION SYSTEMS IN INTERPOLATION PROBLEMS

*Savinov A.V., Avramenka R. A., students*

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics  
Minsk, Republic of Belarus*

*Anisimov V.Ya. – PhD in Physics and Mathematics*

**Annotation.** This paper explores the capabilities of fractal interpolation using a genetic algorithm. The study demonstrates the advantages of this approach for modeling complex systems that extend beyond the framework of traditional Euclidean geometry.

**Keywords.** Fractals, genetic algorithm, IFS, attractor, interpolation, complex systems, affine transformation, numerical analysis, systems modeling.