

УДК 517.38:519.61

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА И ДИСКРЕТНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Солодовников Е.А., Рыжков М.А. студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ. -мат. наук, доцент

Аннотация. В работе рассматривается применение дискретных численных методов для вычисления определённого интеграла при моделировании кинематики движущегося объекта. Приведён сравнительный анализ точности методов левых и правых прямоугольников, метода трапеций и метода Симпсона при аппроксимации площади под кривой зависимости скорости от времени. Оценивается эффективность применения данных алгоритмов на примере функции, описывающей неравномерное движение транспортного средства.

Ключевые слова. Определённый интеграл, численное интегрирование, моделирование движения, метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона, кинематика, вычислительная математика, шаг интегрирования, погрешность аппроксимации.

Моделирование физических процессов с использованием математического аппарата является фундаментальной задачей в современной науке и инженерии. На практике исследователи редко имеют дело с идеальными постоянными величинами; чаще всего необходимо анализировать функции, имеющие нерегулярный или колебательный характер. Для восстановления полной картины движения, в частности, для нахождения пройденного пути по показаниям скорости, необходимо применение методов численного интегрирования. Понимание точности и границ применимости каждого из этих методов критически важно для корректного анализа данных в транспортной телематике, робототехнике и физике.

В основе кинематики лежит фундаментальная связь: мгновенная скорость материальной точки является производной от функции пройденного пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (1)$$

Следовательно, полный путь, пройденный телом за интервал времени $[t_1; t_2]$ вычисляется через определённый интеграл:

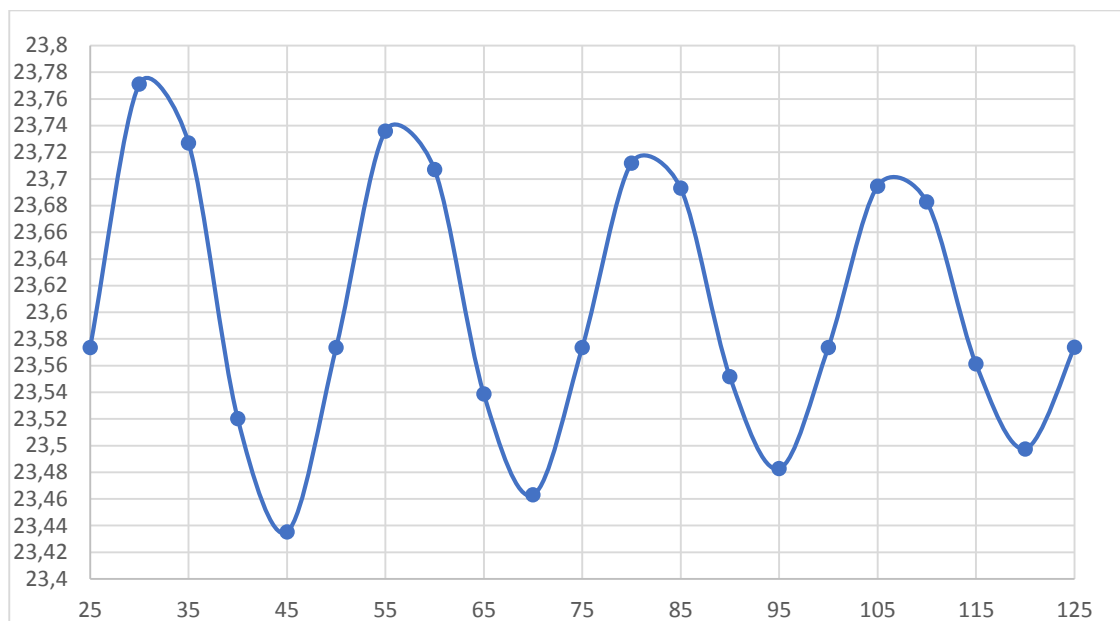
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2)$$

Геометрически это означает, что пройденная дистанция численно равна площади под кривой графика скорости $v(t)$. На практике, при математическом моделировании реального движения, аналитическая первообразная функции скорости часто не выражается в элементарных функциях либо данные поступают в виде дискретного массива точек с датчиков телеметрии. Именно поэтому применение численных методов интегрирования является математически обоснованным инструментом для высокоточной аппроксимации пути.

В рамках данного исследования мы рассматриваем функцию, аппроксимирующую модель движения реального транспортного средства, для которого скорость описывается функцией:

$$v(t) = \frac{5 \cdot \sin(x)}{x} + 23,6, \quad (3)$$

где $v(t)$ — скорость объекта в метрах в секунду (м/с); а t — время в секундах (с). График данной зависимости представлен на рисунке 1.

Рисунок 1 - график зависимости скорости $v(t)$ от времени t

Выбор аналитической модели вида $v(t) = \frac{5 \cdot \sin(x)}{x} + 23,6$ обусловлен желанием сделать её максимально близкой к тому, как тела перемещаются в действительности. Данная функция эффективно имитирует переходные процессы и затухающие осцилляции, характерные для движения транспортных средств в условиях переменного ускорения.

Для вычисления пройденного пути на заданном временном промежутке $[t_1; t_2]$ применим методы численного интегрирования:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{5 \cdot \sin(x)}{x} + 23,6 \right) dt,$$

где s — пройденный путь (м) t_1, t_2 — начальный и конечный моменты времени интервала наблюдения.

Поскольку интегрирование осуществляется дискретными шагами, в работе сравниваются следующие подходы: метод левых прямоугольников, метод правых прямоугольников, метод трапеции и метод Симпсона.

Выпишем сначала значения функции $v(t)$ для различных моментов времени в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения функции $v(t)$ в момент времени t

| t | v | t | v |
|-----|-----------|-----|-----------|
| 25 | 23.573530 | 80 | 23.711983 |
| 30 | 23.771220 | 85 | 23.693139 |
| 35 | 23.727135 | 90 | 23.551762 |
| 40 | 23.520360 | 95 | 23.482813 |
| 45 | 23.435328 | 100 | 23.573690 |
| 50 | 23.573573 | 105 | 23.694545 |
| 55 | 23.735980 | 110 | 23.682901 |
| 60 | 23.707048 | 115 | 23.561336 |
| 65 | 23.538831 | 120 | 23.497593 |
| 70 | 23.463089 | 125 | 23.573763 |
| 75 | 23.573627 | 130 | 23.564227 |

Разберем подробно вычисление пути на временном промежутке $[25; 125]$. Проанализируем каждый метод и оценим его погрешность. Для всех методов мы разбиваем отрезок $[t_1; t_2]$ на n равных частей с шагом h .

Применяя метод прямоугольников, на каждом шаге кривая графика заменяется горизонтальной линией, образуя прямоугольник.

Если использовать метод левых прямоугольников, то высота каждого прямоугольника берется по значению функции в левой границе интервала [1, с. 169]:

$$S = \int_a^b f(x) d(x) \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \quad (4)$$

При подстановке $n = 10$ получаем:

$$S \approx 10 \cdot (23.573530 + 23.727135 + 23.435328 + 23.735980 + 23.538831 + 23.573627 + 23.693139 + 23.482813 + 23.694545 + 23.561336) = 2360.162640.$$

При увеличении числа разбиений до $n = 20$ получим:

$$S \approx 5 \cdot (23.573530 + 23.771220 + 23.727135 + 23.520360 + 23.435328 + 23.573573 + 23.735980 + 23.707048 + 23.538831 + 23.463089 + 23.573627 + 23.711983 + 23.693139 + 23.551762 + 23.482813 + 23.573690 + 23.694545 + 23.682901 + 23.561336 + 23.497593) = 2360.347415.$$

Метод правых прямоугольников: Высота берется по значению функции в правой границе интервала.

$$S = \int_a^b f(x) d(x) \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (5)$$

Подставим $n = 10$ получим:

$$S \approx 10 \cdot (23.727135 + 23.435328 + 23.735980 + 23.538831 + 23.573627 + 23.693139 + 23.482813 + 23.694545 + 23.561336 + 23.573763) = 2360.164970.$$

Для $n = 20$ будет следующий результат:

$$S \approx 5 \cdot (23.771220 + 23.727135 + 23.520360 + 23.435328 + 23.573573 + 23.735980 + 23.707048 + 23.538831 + 23.463089 + 23.573627 + 23.711983 + 23.693139 + 23.551762 + 23.482813 + 23.573690 + 23.694545 + 23.682901 + 23.561336 + 23.497593 + 23.573763) = 2360.348580.$$

Применяя метод трапеций, вместо горизонтальных отрезков точки на графике соединяются наклонными прямыми, образуя под графиком трапеции. Этот метод точнее метода прямоугольников, так как наклонная линия лучше аппроксимирует поведение функции на малом участке [1, с. 170].

$$s = \int_a^b f(x) d(x) \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (6)$$

Если взять $n = 10$, то получим:

$$S \approx 10 \cdot \left(\frac{23.573530 + 23.573763}{2} + (23.520360 + 23.573573 + 23.707048 + 23.463089 + 23.711983 + 23.551762 + 23.573690 + 23.682901) \right) = 2360.163805.$$

В случае $n = 20$ результат равен:

$$S \approx \left(\frac{23.573530 + 23.573763}{2} + (23.771220 + 23.727135 + 23.520360 + 23.435328 + 23.573573 + 23.735980 + 23.707048 + 23.538831 + 23.463089 + 23.573627 + 23.711983 + 23.693139 + 23.551762 + 23.482813 + 23.573690 + 23.694545 + 23.682901 + 23.561336 + 23.497593) \right) = 2360.3479975.$$

Метод Симпсона является самым точным из трех предыдущих методов. Здесь соединяются точки графика не прямыми линиями, а кусками парабол (квадратичных функций). Одна парабола строится

сразу по трем точкам, поэтому для этого метода количество отрезков разбиения обязательно должно быть четным.

Метод Симпсона дает минимальную погрешность для большинства гладких функций, так как кривая параболы очень близко ложится на реальный график [1, с. 175].

$$S \approx \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right). \quad (7)$$

Используя разбиение $n = 10$ результат составит:

$$S \approx \frac{10}{3} (23.573530 + 23.573763 + 4 \cdot (23.727135 + 23.735980 + 23.573627 + 23.482813 + 23.561336) + 2 \cdot (23.435328 + 23.538831 + 23.693139 + 23.694545)) = 2360.648477.$$

При $n = 20$ имеем:

$$S \approx \frac{5}{3} (23.573530 + 23.573763 + 4 \cdot (23.771220 + 23.520360 + 23.573573 + 23.707048 + 23.463089 + 23.711983 + 23.551762 + 23.573690 + 23.682901 + 23.497593) + 2 \cdot (23.727135 + 23.435328 + 23.735980 + 23.538831 + 23.573627 + 23.693139 + 23.482813 + 23.694545 + 23.561336)) = 2360.409395.$$

Для объективной оценки точности рассмотренных алгоритмов результаты были сведены в единую таблицу. В качестве эталонного значения (с погрешностью, стремящейся к нулю) приведено число, вычисленное с высокой машинной точностью при $n \rightarrow \infty$ с использованием системы компьютерной алгебры (СКА). Анализ данных, представленных в таблице 2, позволяет сделать ряд важных заключений о применимости методов численного интегрирования для колебательных функций.

Таблица 2 — Сравнение результатов численного интегрирования на отрезке [25, 125]

| Метод | Разбиения (n) | Результат | Погрешность (%) |
|------------------------|------------------------|--------------|-----------------|
| Левых прямоугольников | 10 | 2360.162640 | 0.0102609 |
| | 20 | 2360.347415 | 0.0024328 |
| Правых прямоугольников | 10 | 2360.164970 | 0.0101622 |
| | 20 | 2360.348580 | 0.0023835 |
| Трапеций | 10 | 2360.163805 | 0.0102116 |
| | 20 | 2360.3479975 | 0.0024081 |
| Симпсона | 10 | 2360.648477 | 0.0103218 |
| | 20 | 2360.409395 | 0.0001929 |
| ЭВМ | $n \rightarrow \infty$ | 2360.4048398 | ~0 |

Для всех без исключения методов наблюдается закономерное снижение погрешности при увеличении числа разбиений от $n = 10$ до $n = 20$. Это подтверждает базовое правило численного анализа: чем мельче шаг интегрирования, тем точнее аппроксимация.

Сравнение простейших методов: методы левых и правых прямоугольников, а также метод трапеций демонстрируют схожий порядок погрешности на данных сетках разбиения (около 0,01 для $n = 10$ и 0,002 для $n = 20$). Это объясняется тем, что для функции, содержащей высокочастотные колебания (наш элемент синусоиды), линейная и ступенчатая аппроксимация на крупных шагах "срезает" экстремумы одинаково грубо.

Явным фаворитом выступает метод парабол. Если при $n = 10$ его погрешность сопоставима с остальными методами в силу того, что шаг слишком велик для захвата изгибов синусоиды, то точность

метода Симпсона возрастает колоссально при $n = 20$, погрешность падает до 0,00019, что на порядок превосходит метод трапеций. Это доказывает, что квадратичная интерполяция оптимально подходит для гладких волнообразных функций.

В задачах транспортной телеметрии, где данные поступают пакетами и вычислительные ресурсы могут быть ограничены, выбор метода имеет решающее значение. Проведенное исследование показывает, что использование метода Симпсона позволяет достичь высокой точности даже при относительно небольшом количестве измерений $n = 20$, что экономит машинную память и время обработки данных по сравнению с методом прямоугольников, требующим для аналогичной точности сотен итераций.

Актуальность работы обусловлена необходимостью высокоточной обработки данных в системах транспортной телеметрии и робототехники, где скорость имеет колебательный характер. Научная новизна и ценность исследования заключаются в сравнительном анализе численных алгоритмов на примере функции, имитирующей динамику реального объекта. Практическая значимость состоит в обосновании выбора метода Симпсона для оптимизации бортовых вычислений, что обеспечивает экономию ресурсов при сохранении точности. В качестве вывода подтверждено, что для волнообразных функций квадратичная интерполяция является наиболее эффективным инструментом аппроксимации.

Список использованных источников:

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. пособие / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Физмат лит, 2003. – 864 с.
2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2008. – 736 с.
3. Stewart, J. *Calculus : textbook* / J. Stewart. – 8th ed. – Boston : Cengage Learning, 2015. – 1392 p.
4. Иродов, И.Е. Основные законы механики : учеб. пособие / И.Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1985. – 248 с.
5. Бахвалов, Н.С. Численные методы : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
6. Burden, R.L. *Numerical Analysis* / R.L. Burden, J.D. Faires. – 9th ed. – Boston : Brooks/Cole, 2010. – 888 p.

UDC 517.38:519.61

MOTION MODELING USING DEFINITE INTEGRALS AND DISCRETE NUMERICAL METHODS

Solodovnicov E.A., Ryzhkov M.A. students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics¹, Minsk, Republic of Belarus

Primicheva Z. N. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Annotation. The paper explores the application of discrete numerical methods for calculating definite integrals in the context of kinematics modeling. A comparative analysis of accuracy is conducted for the left and right Riemann sums, the trapezoidal rule, and Simpson's rule by approximating the area under a velocity-time curve. The effectiveness of these algorithms is evaluated using a function that describes the non-uniform motion of a vehicle.

Keywords. Definite integral, numerical integration, motion modeling, rectangle method, trapezoidal rule, Simpson's rule, kinematics, computational mathematics, integration step, approximation error.