УДК 517.443

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИКЛАДНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Терёхин Б.В., Гайдук Н.И., Мухин З.С. студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лущакова И.Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. В данной работе изложены теоретические основы преобразования Фурье и рассмотрены его основные области применения в различных прикладных дисциплинах. Описано явление эффекта Гиббса, приведена теорема Котельникова. Предложена формула для расчёта среднеквадратической погрешности аппроксимации функции с помощью конечного числа членов ряда Фурье. Рассмотрена концепция дискретного преобразования Фурье и алгоритм алгоритм быстрого преобразования Фурье, эффективно реализующий её. Разработано приложение, использующее алгоритм быстрого преобразования Фурье, которое позволяет визуализировать спектр функции.

Ключевые слова. Ряд Фурье, преобразование Фурье, спектр функции, области применения преобразования Фурье, среднеквадратическая погрешность, эффект Гиббса, теорема Котельникова, дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье, спектральная утечка.

1. Теоретические основы спектрального представления функций. Спектральное представление функции – это разложение сложных функции (сигнала) на сумму более простых гармонических колебаний. Такое разложение осуществляется с использованием ряда Фурье и преобразования Фурье.

Ряд Фурье – это представление периодической функции f с периодом T в виде:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right), \qquad (1)$$

где a_0, a_k и b_k – коэффициенты ряда Фурье.

Нулевой член ряда является постоянным значением и равняется среднему значению функции f на интервале, равном периоду T:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad (2)$$

Коэффициенты a_k и b_k находятся по следующим формулам:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \qquad (3)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \qquad (4)$$

Для нахождения членов ряда Фурье также удобно использовать комплексные числа, руководствуясь тождеством:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \qquad (5)$$

Тогда k-й коэффициент ряда Фурье c_k можно найти по следующей формуле:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}dt \qquad (6)$$

Модуль такого комплексного числа равняется половине амплитуды, а аргумент отвечает за сдвиг соответствующей синусоиды.

Ряд Фурье в комплексной форме для функции f принимает вид:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \qquad (7)$$

Преобразование Фурье можно назвать обобщением ряда Фурье для непериодических функций. Преобразование Фурье функции $g(t)$ определяется как:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift}dt \tag{8}$$

Результатом является функция G от частоты f. Таким образом, $G(f)$ показывает, какой вклад в функцию $g(t)$ вносит частота f, поэтому функцию $G(f)$ можно назвать спектром функции $g(t)$. Существует и обратное преобразование Фурье, позволяющее восстановить исходную функцию $g(t)$ из функции $G(f)$:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{2\pi ift}df = g(t) \tag{9}$$

2. Основные области применения преобразования Фурье.

Преобразование Фурье является одним из важнейших инструментов прикладных дисциплин, так как оно позволяет переходить от представления функции (сигнала) во временной или пространственной области к частотному представлению, где многие задачи становятся более наглядными и удобными для решения. Благодаря этому свойству преобразование Фурье широко применяется не только в математике, но и в информатике, физике, астрономии и множестве других областей. Рассмотрим основные применения преобразования Фурье на конкретных примерах.

2.1. Применение преобразования фурье в математике

2.1.1. Быстрое перемножение полиномов и чисел. При помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (бпф) можно ускорить процесс перемножения двух полиномов, уменьшив количество операций с $O(n^2)$ до $O(n * \log_2 n)$, где n – степень итогового полинома. Использование преобразования Фурье позволяет перевести полиномы, заданные коэффициентами, в их значения в специальных точках, представленных комплексными числами. Далее производится почленное перемножение полученных значений за линейное количество операций. Наконец, для получения результата применяется обратное преобразование Фурье, возвращающее результат из вида точек обратно в форму коэффициентов итогового полинома.

Этот же способ можно использовать для перемножения чисел. Для этого требуется записать числа в позиционном представлении как полиномы, затем эффективно перемножить их способом, описанным выше, и выполнить перенос разрядов.

2.1.2. Нахождения всех возможных комбинаторных сумм

Рассмотрим задачу, в которой нам даны два массива чисел A и B и требуется найти все возможные суммы вида $\mathrm{A[i] + B[j]}$, где $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, n и m – длины массивов A и B соответственно. Для каждой возможной суммы требуется посчитать количество способов её получить. Для этого сначала требуется построить два полинома для массивов A и B, в которых числа массива будут являться степенями полинома, а коэффициенты будут показывать количество вхождений соответствующего числа в массив. После эффективного перемножения этих двух полиномов способом, описанным выше, получается полином C, в котором степени будут являться всеми возможными суммами, которые можно получить, а соответствующие коэффициенты будут обозначать количество способов их получить.

2.2. Применение преобразования фурье в информатике

2.2.1. Сжатие звуковых файлов и изображений, шумоподавление

В обработке звука и изображений преобразование фурье используется для уменьшения количества памяти, занимаемого файлами. В случае звукового файла сигнал разбивается на короткие временные промежутки, для каждого из которых вычисляют спектр. Далее коэффициенты, соответствующие частотам, неслышимым уху человека, отбрасываются. При шумоподавлении такой подход также позволяет выявлять и подавлять шумы определённых частот. Затем в файле сохраняются оставшиеся коэффициенты спектра для каждого временного промежутка. Для воспроизведения такого звукового файла применяется обратное преобразование Фурье, в результате которого мы получаем звуковой сигнал, достаточно близкий к исходному. Подобный модифицированный способ сжатия звуковых файлов используется форматом MP3.

При сжатии изображений цветовые каналы обрабатываются по отдельности, так как каждый из них определяет яркость пикселей в данном канале, которую можно интерпретировать как амплитуду. Изображение также разбивается на маленькие блоки пикселей, к которым применяется преобразование Фурье. Низкие частоты в картинке представляют собой плавные переходы цвета, а высокие частоты – резкие. Далее амплитуда каждой частоты делится на соответствующее предопределённое число, которое тем выше, чем выше частота. Из-за этого большое количество высоких частот, незаметных человеческому глазу, превращается в нули, что позволяет уменьшить количество информации об изображении, хранящейся в файле. Для восстановления изображения из такого файла используется обратное преобразование Фурье. Подобный модифицированный способ сжатия изображений используется форматом JPEG.

2.3. Применение преобразования фурье в физике

2.3.1. Решение дифференциальных уравнений теплопроводности

При решении уравнений теплопроводности начальное распределение температуры представляется в виде суммы гармонических составляющих. Для каждой такой составляющей уравнение решается отдельно, а затем по принципу линейности все частные решения складываются, что даёт решение исходной задачи. Этот способ упрощает решение исходного дифференциального уравнения, разбивая его на части, которые в отдельности решаются гораздо проще, а затем собирая их в итоговый ответ.

2.4. Применение преобразования фурье в астрономии

2.4.1. Анализ света, испускаемого небесными телами

В астрономии преобразование Фурье используется при анализе света, полученного от звёзд и других небесных объектов. Полученный свет рассматривается как сигнал, составленный из волн различной длины, и исследуется его спектр. По спектру света можно определить, из каких химических элементов состоит небесное тело, а также узнать некоторые его физические свойства.

3. Погрешность при аппроксимации функции с помощью ряда фурье. При аппроксимации функций с точками разрыва 1-го рода с помощью ряда фурье вблизи точек разрыва возникают колебания, или всплески. Это поведение называют эффектом гиббса. При увеличении числа членов ряда фурье такие всплески не исчезают полностью: их ширина уменьшается, стремясь к нулю при приближении числа членов ряда фурье к бесконечности, но высота остаётся прежней. Стоит отметить, что эффект гиббса возникает только вблизи точек разрыва 1-го рода. Если функция непрерывна, но имеет резкие изменения значения, вблизи таких изменений при конечном числе членов ряда фурье могут возникать подобные колебания, однако их амплитуда стремится к нулю при приближении числа членов ряда фурье к бесконечности.

Для вычисления погрешности аппроксимации функции f с помощью N первых членов ряда Фурье воспользуемся формулой среднеквадратической погрешности:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt} \tag{10}$$

Подставим в качестве функции $g(t)$ сумму первых N членов ряда Фурье и получим:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \right|^2 dt} \tag{11}$$

4. Алгоритмы реализации преобразования Фурье. В информатике используются алгоритмы так называемого дискретного преобразования фурье (дпф), поскольку компьютеры оперируют исключительно дискретными величинами. Дпф позволяет перевести дискретные значения сигнала из временной формы в частотную, распределяя вклад частот по соответствующим ячейкам итогового массива. При этом точность вычислений напрямую зависит от длины анализируемого отрезка сигнала: чем длиннее интервал, тем меньше становится шаг между соседними частотными ячейками в полученном массиве, позволяя различить более близкие по значению частоты, которые при меньшей длине анализируемого отрезка слились бы в общую частотную составляющую. Ширина одной частотной ячейки итогового массива, или минимальная различимая разница между соседними частотами, вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta f = \frac{1}{T}, \tag{12}$$

где T – длительность анализируемого интервала.

Существует теорема Котельникова, утверждающая, что любую функцию $f(t)$, состоящую из частот от 0 до f_{max}, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через интервалы времени, вычисляемые по следующей формуле:

$$\Delta x = \frac{1}{2f_{max}}, \tag{13}$$

где f_{max} – наибольшая частота, присутствующая в спектре функции.

То есть, согласно этой теореме, частота дискретизации должна как минимум в два раза превышать верхнюю границу его спектра, чтобы избежать потерю данных и некорректное восстановление исходного сигнала. Увеличение же частоты дискретизации сигнала выше этого минимального порога при неизменной длине анализируемого отрезка сигнала всё ещё позволяет снизить значение среднеквадратической погрешности за счёт усреднения шума и повышения точности интерполяции.
На практике используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), так как он выполняет $O(n * \log_2 n)$ операций, тогда как «наивная» реализация выполняет $O(n^2)$ операций, где n – количество дискретных значений сигнала, поданных на вход. Основная идея БПФ заключается в применении принципа «разделяй и властвуй». Исходная последовательность разделяется на две части – элементы с чётными и нечётными индексами. Затем преобразование Фурье вычисляется отдельно для каждой из этих частей, после чего полученные результаты объединяются. Благодаря этому удаётся многократно переиспользовать промежуточные результаты вычислений и существенно сократить число выполняемых операций.

5. Визуализация преобразования фурье. С целью наглядно увидеть результат работы алгоритма дискретного преобразования фурье было разработано приложение. Оно позволяет создать функцию с помощью суммирования произвольного количества синусоид, параметры которых, такие как частота, амплитуда и сдвиг, задаются пользователем. Далее, чтобы однозначно передать полученную функцию, дискретные значения функции высчитываются в точках с шагом, не превышающим Δx, вычисляемым согласно формуле (13). Затем дискретизированные данные передаются на вход алгоритма быстрого преобразования фурье, после чего строятся графики. Интерфейс приложения и демонстрация дискретного преобразования фурье функции, состоящей из двух синусоид с частотами 3 и 5 гц, приведены на рисунке 1.

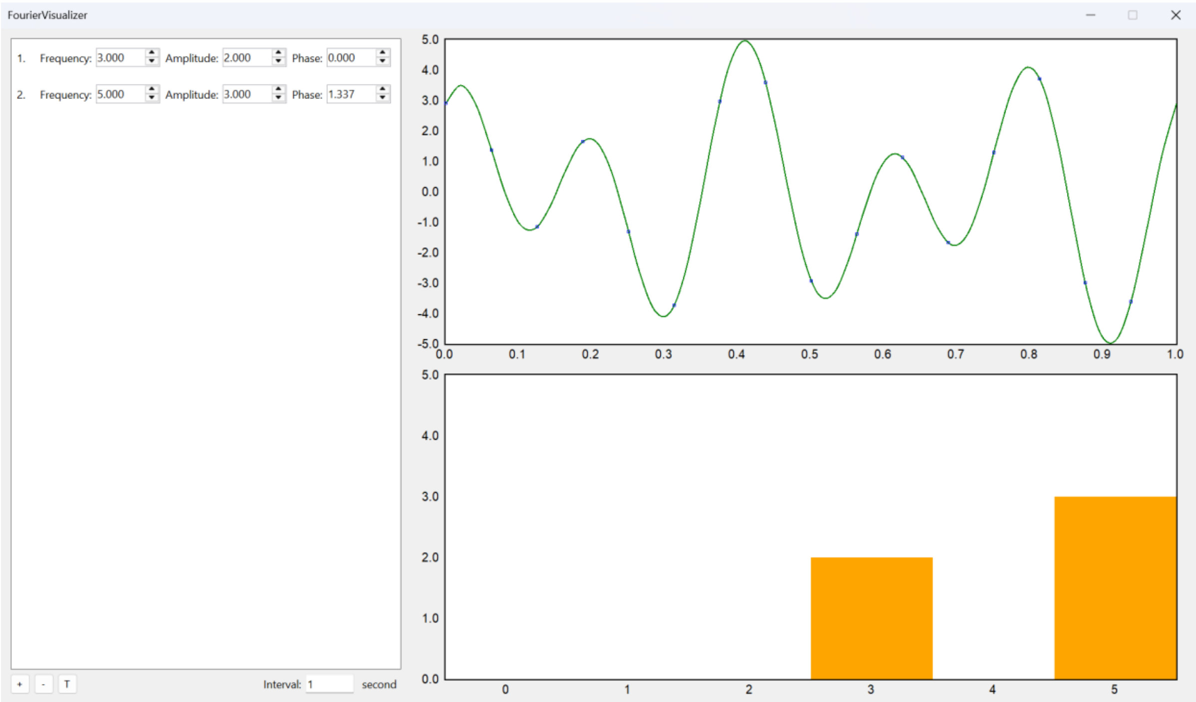

Рисунок 1 – Интерфейс разработанного приложения

Интерфейс приложения имеет 3 основных панели. В левой части интерфейса пользователь может добавлять произвольное количество синусоид, сумма которых образует функцию, и редактировать их параметры. В правой части интерфейса расположены 2 графика. На верхнем графике изображена исходная функция с нанесёнными на неё точками дискретизации. На нижнем графике – результат работы дискретного преобразования Фурье. В данной ситуации алгоритм в точности определяет частоты и амплитуды синусоид, составляющих исходную функцию. Шаг между соседними ячейками результата вычисляется по формуле (12) и в данном случае равняется 1 Гц, так как длительность анализируемого интервала равняется 1 секунде, что можно видеть под первой панелью. При увеличении длительности анализируемого интервала в 4 раза, шаг между соседними ячейками результата уменьшится в такое же количество раз, позволяя теперь различать частоты с разницей 0.25 Гц, что можно видеть на рисунке 2.

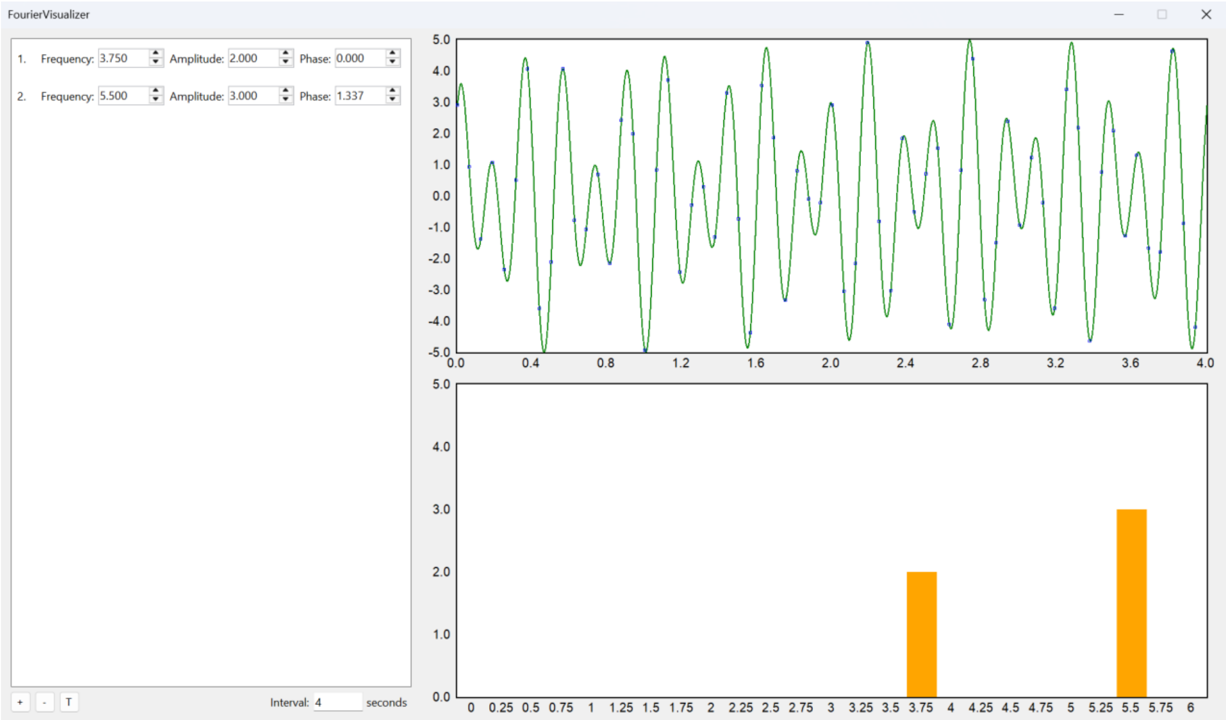

Рисунок 2 – Результат дискретного преобразования Фурье при длительности анализируемого интервала в 4 секунды

Если же изменить частоты синусоид, образующих исходную функцию, таким образом, чтобы они не были кратны шагу между соседними ячейками итогового массива, тогда можно будет наблюдать эффект, называемый «спектральной утечкой» (от англ. spectral leakage). Спектральная утечка возникает потому, что при несоблюдении кратности в указанный отрезок времени помещается не целое число периодов волн, в результате чего конечное значение сигнала не совпадает с его начальным значением. Поскольку алгоритм дискретного преобразования Фурье воспринимает анализируемый фрагмент данных как бесконечно повторяющийся, то в местах соединения фрагментов возникает разрыв 1-го рода и образуется скачок функции, что приводит к возникновению дополнительных частотных составляющих. Данный эффект изображён на рисунке 3.

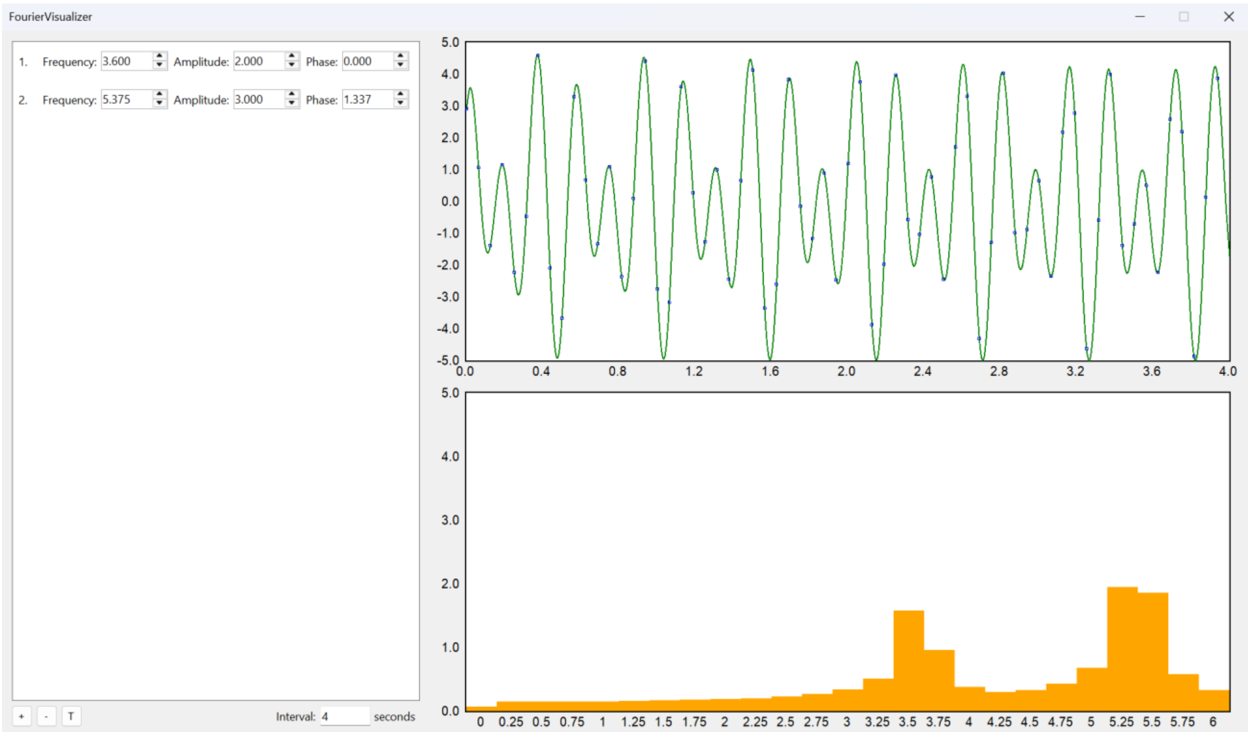

Рисунок 3 – Демонстрация спектральной утечки

Для решения проблемы спектральной утечки используются оконные функции, на которые умножается исходный сигнал перед выполнением дискретного преобразования Фурье. Такой подход позволяет плавно снизить амплитуду сигнала у его границ, что существенно сглаживает разрыв в местах соединения фрагментов.

Список использованных источников:

1. Fourier Series [Электронный ресурс] // The Fourier Transform. – Режим доступа: URL: https://thefouriertransform.com (дата доступа: 02.04.2026)

2. Fast Fourier transform [Электронный ресурс] // Algorithms for Competitive Programming. – Режим доступа: URL: https://cp-algorithms.com/algebra/fft.html (дата доступа: 04.04.2026)

3. The Applications of Fourier Analysis in Audio Compression [Электронный ресурс] // Medium. – Режим доступа: URL: https://medium.com/@27ane/the-applications-of-fourier-analysis-in-audio-compression-800f0f7fe9a3 (дата доступа: 05.04.2026)

4. JPEG [Электронный ресурс] // Wikipedia. – Режим доступа: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/JPEG (дата доступа: 05.04.2026)

5. Solving the heat equation | DE3 [Видеозапись] // YouTube. – Режим доступа: URL: https://www.youtube.com/watch?v=ToIXSwZ1pJU (дата доступа: 11.04.2026)

6. Gibbs phenomenon [Электронный ресурс] // Wikipedia. – Режим доступа: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon (дата доступа: 12.04.2026)

7. Nyquist–Shannon sampling theorem [Электронный ресурс] // Wikipedia. – Режим доступа: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist%E2%80%93Shannon_sampling_theorem (дата доступа: 13.04.2026)

8. Spectral leakage [Электронный ресурс] // Wikipedia. – Режим доступа: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_leakage (дата доступа: 19.04.2026)

UDC 517.443

SPECTRAL REPRESENTATION OF FUNCT IONS AND ITS APPLICATIONS

Teryokhin B.V., Gaiduk N.I., Mukhin Z.S., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
Minsk, Republic of Belarus

Lushchakova I.N. – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

Annotation. This article presents the theoretical foundations of the Fourier transform and examines its main applications in applied disciplines. The Gibbs phenomenon is described, the Kotelnikov (Nyquist–Shannon) theorem is stated. A formula is proposed for calculating the root mean square error when a function is approximated by a finite number of terms of the Fourier series. The concept of the discrete Fourier transform and the algorithm that efficiently implements it, the fast Fourier transform algorithm, are considered. An application based on the fast Fourier transform algorithm has been developed, which makes it possible to visualize the spectrum of a function.

Keywords. Fourier series, Fourier transform, spectrum of a function, applications of the Fourier transform, root mean square error, Gibbs phenomenon, Kotelnikov (Nyquist–Shannon) theorem, discrete Fourier transform, fast Fourier transform, spectral leakage.