

УДК 539.12:537.63:004.942

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ШТЕРНА-ГЕРЛАХА ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯ КОНИЧЕСКОГО СОЛЕНОИДА В СРЕДЕ РАЗРАБОТКИ MATLAB

Семерник Р.Д., студент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Григорьев А.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

**Аннотация.** Работа посвящена моделированию неоднородного магнитного поля катушки с постоянным током и дальнейшего проведения эксперимента Штерна-Герлаха на основе неоднородного поля конической катушки и сравнения оригинального результата с полученным в работе. В основе работы используется свойства градиента и вектора магнитной индукции. Сама работа была выполнена в среде разработки MATLAB.

**Ключевые слова.** Эксперимент Штерна-Герлаха, градиент, коническая катушка, MATLAB, неоднородное магнитное поле, моделирование результатов, вектор магнитной индукции, электромагнетизм.

**Введение.** Эксперимент Штерна-Герлаха (1922 г.) является одним из краеугольных камней квантовой физики, наглядно продемонстрировавшим пространственное квантование. Однако историческая реализация эксперимента была сопряжена со значительными техническими трудностями и требовала уникального лабораторного оборудования. Сегодня развитие вычислительных сред, таких как MATLAB, позволяет воспроизводить и исследовать сложные процессы путем математического моделирования, что значительно упрощает анализ.

В связи с этим было решено воспроизвести компьютерную симуляцию эксперимента Штерна-Герлаха. В качестве ключевого различия элемента модели предлагается использовать не классическую магнитную систему, а альтернативный источник неоднородного поля — поле конической катушки. Это позволит не только визуализировать поведение частиц, но и оценить применимость различных конфигураций магнитного поля для наблюдения квантовых эффектов, и нахождения различий в их поведении.

**Обоснование выбора программных средств и источника неоднородного поля.** Использование MATLAB как основной программой для моделирования является не случайным. Данная среда может обеспечивать высокий контроль над математическим описанием движения частиц, а также она достаточно удобна для интегрирования уравнений движения, обработки большого количества данных. Возможность генерации случайных начальных условий и визуализации частиц также являются обязательным для эксперимента, что и предоставляет MATLAB.

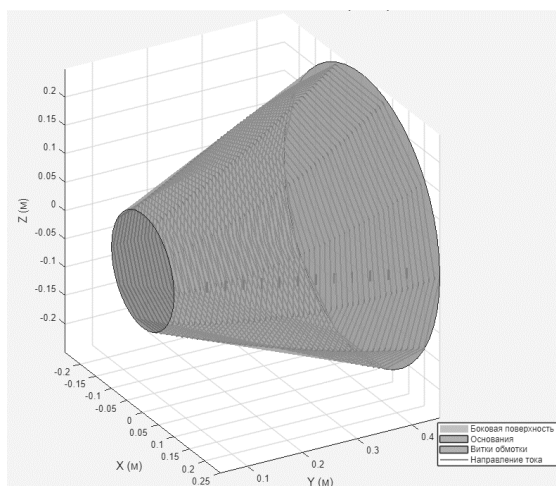


Рисунок 1 – Схематичная 3D - модель конической катушки в среде разработки MATLAB

Коническая катушка для генерации магнитного поля выбрана в связи с тем, что данная разновидность катушки может создавать неоднородное поле с собственным градиентом, что и требуется для проверки эксперимента Штерна-Герлаха.

**Моделирование магнитного поля.** Для непосредственного моделирования была выбрана коническая катушка со следующими начальными данными:  $a = 0,1$  м – радиус меньшего основания,  $b = 0,25$  м – радиус большего основания катушки,  $L = 0,15$  м – длина катушки вдоль оси Y,  $c = 0,05$  м –

отставания меньшего основания от начала отсчета,  $n = 1000$  – количество витков,  $I = 5$  А – ток в катушке. Схематичное изображение катушки в пространстве представлено на рисунке 1.

Для построения неоднородного магнитного поля нам необходимо найти проекции магнитной индукции на оси Y и Z, градиент нашего поля, а также модуль индукции поля.

Для нахождения  $B_y(y)$  мы можем использовать формулу для нахождения индукции поля кольцевого слоя плотностью намотки в полярных координатах, изменяя плоскость с XOZ на YOZ [5]:

$$B_y(y) = \frac{\mu_0 n I}{\cos \alpha} \left( \frac{y-c}{\sqrt{(y-c)^2 - a^2}} - \frac{h+c-y}{\sqrt{(h+c-y)^2 - b^2}} \right), \quad (1)$$

где  $h$  – полная высота по оси OY,  $\alpha$  – угол наклона образующей конуса.

После этого с помощью уравнений Максвелла находим индукцию относительно оси Z и градиент поля:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} \approx \frac{B_y(y+\delta) - B_y(y-\delta)}{2\delta}, \quad (2)$$

где  $\delta$  – малое приращение, численное равно  $10^{-6}$  м.

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$B_z(y, z) = -\frac{z}{2} \frac{\partial B_y}{\partial y} \quad (4)$$

Далее нам необходимо посчитать модуль поля, для этого воспользуемся известной формулой подсчета модуля проекций:

$$|B| = \sqrt{B_y^2 + B_z^2} \quad (5)$$

Далее выбирая начальную точку на оси  $y = c$ , и давая ей малое приращение найдем нужные нам величины на всей полости обрезанного конуса. На основе этих вычислений был смоделирован контурный график модуля вектора индукции, который можно увидеть на рисунке 2.

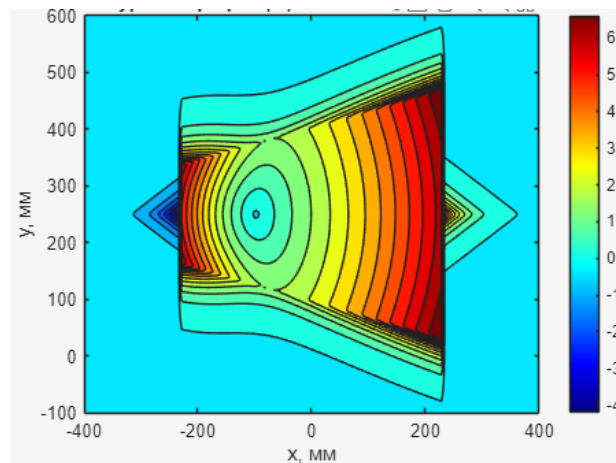


Рисунок 2 – Контурный график модуля вектора индукции

По данным рисунка можно судить о градиентности поля внутри катушки с постоянным током.

**Моделирование эксперимента.** Движение атома можно описать уравнением 2-го закона Ньютона с силой, обусловленной магнитным градиентом:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{\nabla} (\vec{\mu}, \vec{B}(\vec{r})), \quad (6)$$

где  $m$  – масса атома (в работе мы использовали массу атома серебра),  $\vec{\mu}$  – магнитный момент атома.

В нашей упрощенной модели, считая магнитный момент постоянным по модулю и ориентированным вдоль или против оси градиента, то модуль силы можно упростить к проекции только по z:

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (7)$$

где  $z$  – направляющая ось расщепления пучка.

Для непосредственной численной интеграции был взят явный метод Эйлера:

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}_n \Delta t, \quad \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t. \quad (8)$$

Стоит отметить, что шаг  $\Delta t$  выбирался достаточно малым, для обеспечения устойчивости и точности.

Для моделирования пучка бралось достаточно большое число частиц ( $10^5$ ). Также были промоделированы две пластины с прорезями, чтобы соответствовать оригинальному эксперименту Штерна-Герлаха.

Первая щель была задана простым уравнением окружности:

$$x^2 + z^2 = r^2 \quad (9)$$

Вторая щель была задана же как пересечение двух парабол:

$$f(x) = \pm \frac{2h}{w^2} x^2 + z_c \mp \frac{h}{2}, \quad -\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}, \quad (10)$$

где  $h$  – высота щели,  $w$  – ширина,  $z_c$  – смещение по оси  $z$ .

Начальные координаты выбирались в окне первой пластины.

Для моделирования был выбран атом серебра (Ag) с массой  $m = 1.7912 \cdot 10^{-25}$  кг.

Для расчета средней квадратичной скорости частиц воспользуемся распределением Максвелла-Больцмана [4]:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4k_B T}{m}} \quad (11)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура источника,  $m$  – масса атома серебра.

При заданной температуре печи  $T = 1323$  К находим из уравнения (11)  $v_0 = 638,67$  м/с. На основе полученного значения можем выбрать диапазон модулей средней скорости каждой отдельно взятой частицы. Диапазон будет равен [590; 690] м/с.

Стоит учесть, что в модели не учитывались столкновения между атомами и рассеяние на остаточных газах. В дальнейшем при необходимости можно добавить стохастические столкновения, описываемые параметром затухания, чтобы учесть реальные условия эксперимента.

Сам детекторный экран был смоделирован как вертикальная плоскость, проходящая за нашей катушкой в вертикальной плоскости. Частицы пересекающие данную плоскость перестают участвовать в симуляции и в конечном итоге будут отображены на итоговой модели (рисунки 3-4).

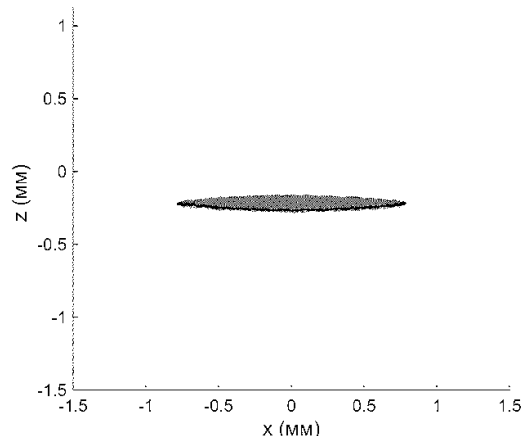


Рисунок 3 – Изображение распределения частиц на детекторе с начальным градиентом

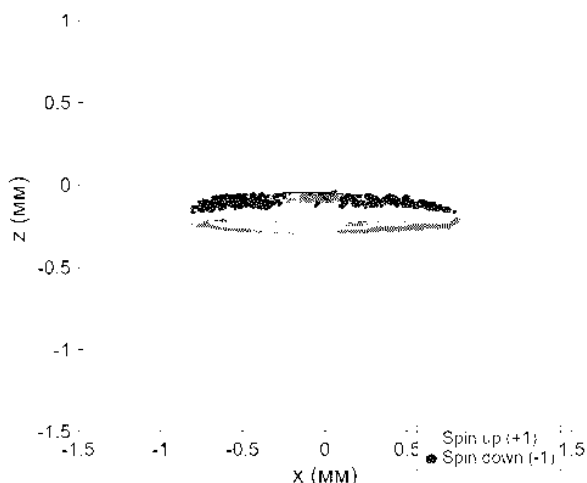


Рисунок 4 – Изображение распределения частиц на детекторе с увеличенным в 50 раз градиентом

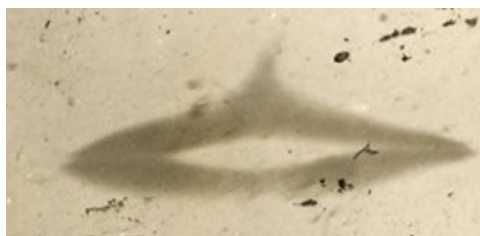


Рисунок 5 – Результат оригинальной работы [2]

**Результаты моделирования.** Полученное изначально изображение распределения частиц на детекторе (рисунок 3) не дает нам представления о расщеплении атомного пучка на две четко выраженные компоненты. Это объясняется тем, что градиент поля конической катушки, в отличие от градиента поля постоянных магнитов, значительно мал, поэтому он не может четко разделить атомный пучок. При увеличении градиента можно наблюдать что постепенно происходит разделение на две компоненты, что можно четко увидеть на рисунке 4. Отличие от оригинального эксперимента, можно объяснить тем, что поле конической катушки более однородно чем поле системы магнитов [2]. Непосредственное увеличение градиента происходило путем увеличения тока в симуляции магнитного поля катушки. Отклонения траектории наблюдается в зоне с экстремальными значениями градиента z-компоненты вектора магнитной индукции, что полностью согласуется с теоретической зависимостью силы (7). Полученная модель показывает, что распределение частиц на детекторе разнится в зависимости от градиента, а точнее от неоднородного магнитного поля которое используется в модели, это можно увидеть, сравнивая рисунки 4 и 5.

**Заключение.** В данной работе в среде MATLAB было выполнено моделирование эксперимента Штерна-Герлаха с использованием неоднородного магнитного поля конической катушки. Разработанная модель позволяет рассчитывать компоненты магнитной индукции и градиента поля, а также траектории движения атомов серебра под действием силы, обусловленной неоднородностью поля.

Возможные дальнейшие улучшения включают расчет эксперимента для других источников неоднородного магнитного поля, учет квантовой природы спина, использование более точных схем и учет внешней среды.

**Список использованных источников:**

1. Otto Stern. Ein Weg zur experimentellen Prufung der Richtungsquantelung im Magnetfeld//Zeitschrift fur Physik, 1921, Volume 7, Issue 1, pp 249-253
2. W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms//Zeitschrift fur Physik, 1922, Volume 8, Issue 1, pp 110-111
3. W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld, Zeitschrift fur Physik 9 (1922) 349-352
4. Otto Stern. Bemerkungen uber die Auswertung der Aufspaltungsbilder bei der magnetischen Ablenkung von Molekularstrahlen// Zeitschrift fur Physik, Volume 41, Issue 5, pp 563-568, 1927.
5. Григорьев, А. А. Технологизация процесса изучения свойств магнитных полей посредством моделирования в Mathcad / А. А. Григорьев // Проблемы и перспективы технологического образования в России и за рубежом : электронный сборник материалов V Международной научной-практической конференции, г. Ишим, 2 марта 2023 г. / Ишимский педагогический институт им. П. П. Ершова ; отв. ред. Л. В. Козуб. – Ишим, 2023. – С. 144-146.

UDC 539.12:537.63:004.942

## **MODELING THE STERN–GERLACH EXPERIMENT FOR THE CASE OF AN INHOMOGENEOUS FIELD OF A CONICAL SOLENOID IN THE MATLAB DEVELOPMENT ENVIRONMENT**

*Semernik R.D., student*

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,  
Minsk, Republic of Belarus*

*Grigoriev A.A. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences*

**Annotation.** The work is devoted to simulating the inhomogeneous magnetic field of a coil with direct current and further conducting the Stern-Gerlach experiment based on the inhomogeneous field of a conical coil, as well as comparing the original result with that obtained in the study. The work is based on the properties of the gradient and the magnetic induction vector. The study itself was carried out in the MATLAB development environment.

**Keywords.** Stern-Gerlach experiment, gradient, conical coil, MATLAB, inhomogeneous magnetic field, simulation of results, magnetic induction vector, electromagnetism.