

УДК 537.6:004.94

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Соловьёв А.Л., студент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Григорьев А.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

**Аннотация.** В работе рассматривается методика расчёта и визуализации градиентного магнитного поля катушки с током в пакете компьютерной математики Mathcad. Приведены формулы для вычисления осевой составляющей магнитной индукции, построены графики функции  $B(x)$  и векторного поля. Показано применение антигильмгольцевой конфигурации катушек для формирования поля с нулевой индукцией в центре. Рассмотрена линейная аппроксимация градиента поля методом наименьших квадратов средствами Mathcad.

**Ключевые слова.** магнитное поле, градиент индукции, катушка с током, антигильмгольц, Mathcad, моделирование, визуализация.

### Введение

Использование компьютерных систем математического моделирования в учебном процессе физических и инженерных дисциплин является одним из ключевых направлений технологизации современного образования. Программный пакет Mathcad представляет собой систему компьютерной алгебры класса САПР, ориентированную на создание интерактивных вычислительных документов с визуальным сопровождением [1]. Его открытая архитектура, поддержка технологий .NET и XML позволяют легко интегрировать Mathcad в широкий спектр инженерных приложений.

Особое место в физике и смежных технических областях занимают неоднородные (градиентные) магнитные поля. Они применяются в ядерно-магнитно-резонансной (ЯМР) томографии для пространственного кодирования сигнала [2], в установках магнитного удержания частиц, а также в экспериментах типа Штерна–Герлаха по исследованию квантовых свойств атомов [3].

Цель настоящей работы — продемонстрировать методику расчёта и визуализации градиентного магнитного поля катушки с током в среде Mathcad, установить область линейного роста индукции и вычислить градиент поля методом линейной регрессии.

### 1. Теоретические основы

Рассмотрим соленоид конечной длины, ось симметрии которого совпадает с осью ОХ. Катушка имеет внутренний радиус  $a$  и внешний радиус  $b$ , плотность намотки  $n$  витков на единицу длины, по каждому витку течёт ток  $I$ .

Для кольцевого слоя катушки толщиной  $ds$  индукция поля на оси записывается через закон Био–Савара [4]:

$$dB = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot r^2 / (2 \cdot R^3 \cdot \cos \alpha) ds, \quad (1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная;  $r$  — радиус витка;  $R$  — расстояние от элемента тока до точки наблюдения;  $\alpha$  — угол между  $R$  и осью катушки.

После перехода к полярным координатам и интегрирования по длине катушки получаем аналитическое выражение для осевой составляющей индукции [1]:

$$B(x) = (\mu_0 \cdot n \cdot I / 2) \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad (2)$$
$$\cos \theta_1 = [h - (x - c)] / \sqrt{[h - (x - c)]^2 + b^2},$$
$$\cos \theta_2 = (x - c) / \sqrt{(x - c)^2 + a^2}.$$

Здесь  $h$  — полудлина катушки;  $a$  и  $b$  — внутренний и внешний радиусы;  $c$  — координата начала катушки.

### 2. Реализация модели в Mathcad

Расчётная модель реализована в среде Mathcad Prime. Параметры модели:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $n = 1000$  вит/м;  $I = 5$  А;  $a = 2$  см;  $b = 4.39$  см;  $c = 0$ ;  $h = 5$  см.

```

μ0 := 4·π·10-7; n := 1000; l := 5; a := 0.02; b := 0.0439; h := 0.05
x := -0.1, -0.099 .. 0.15
cosθ1(x) := (h-x) / √((h-x)2+b2)
cosθ2(x) := x / √(x2+a2)
B(x) := (μ0·n·l/2)·(cosθ1(x) - cosθ2(x))
S := linfit(x_lin, B_lin, F) → k = S(0) = 6.17 мТл/м
    
```

Листинг 1 – Ключевые блоки Mathcad-документа для расчёта B(x)

### 3. Анализ градиента поля

На рисунке 1 представлен график функции B(x), полученный в Mathcad при указанных параметрах. Вблизи торца катушки (область  $x \in [1.2; 2.0]$  см, выделена оранжевым) наблюдается участок с практически линейным ростом индукции.

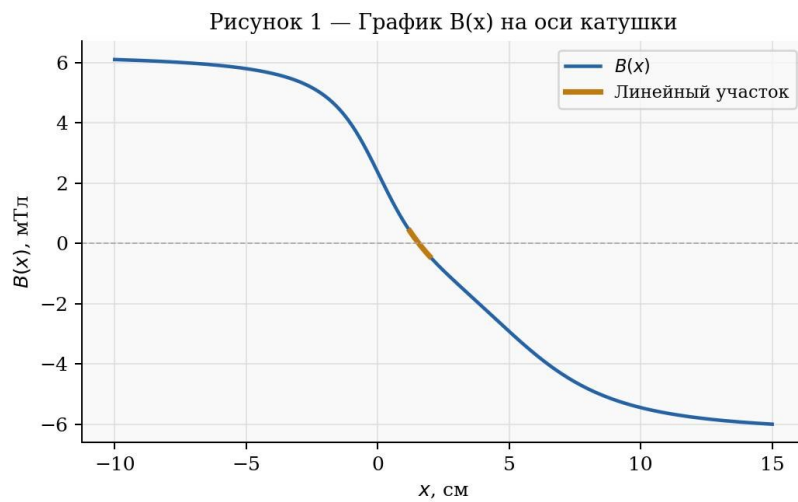


Рисунок 1 – График B(x) на оси катушки; оранжевым выделен линейный участок

Для количественного определения градиента вызывается встроенная процедура linfit, реализующая метод наименьших квадратов. Аппроксимирующая прямая (рис. 2):

$$B_f(x) = k \cdot x + c_0 \quad (3)$$

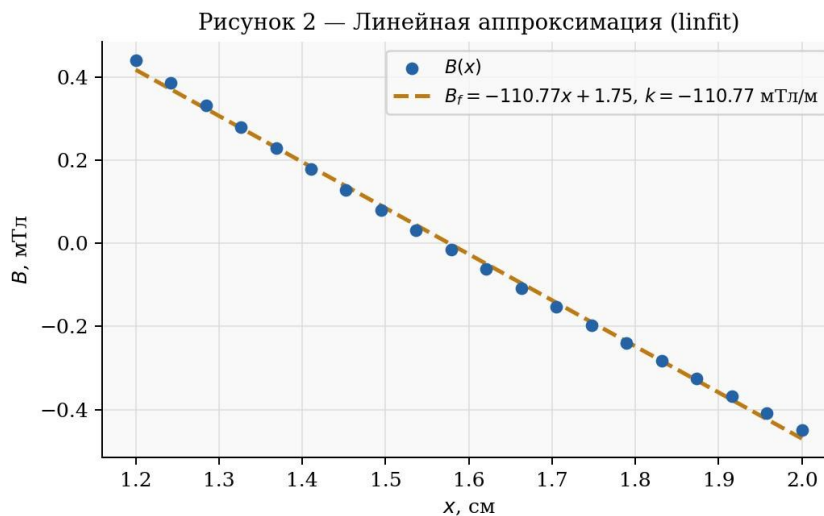


Рисунок 2 – Линейная аппроксимация B(x) процедурой linfit

Результат:  $k \approx 6.17$  мТл/м;  $c_0 \approx -3.7$  мТл. Таким образом, градиент магнитной индукции на данном участке:

$$\partial B/\partial x = k \approx 6.17 \text{ мТл/м.} \quad (4)$$

#### 4. Антигельмгольца конфигурация

Для создания поля с нулевой индукцией в центре применяется антигельмгольца конфигурация: две одинаковые катушки, расположенные соосно и симметрично, через которые пропускаются токи противоположных направлений [3]. Суммарная индукция:

$$B_{total}(x) = B(x + d/2, +I) + B(x - d/2, -I). \quad (5)$$

На рисунке 3 показан результат моделирования для  $d = 6$  см,  $I = 5$  А.

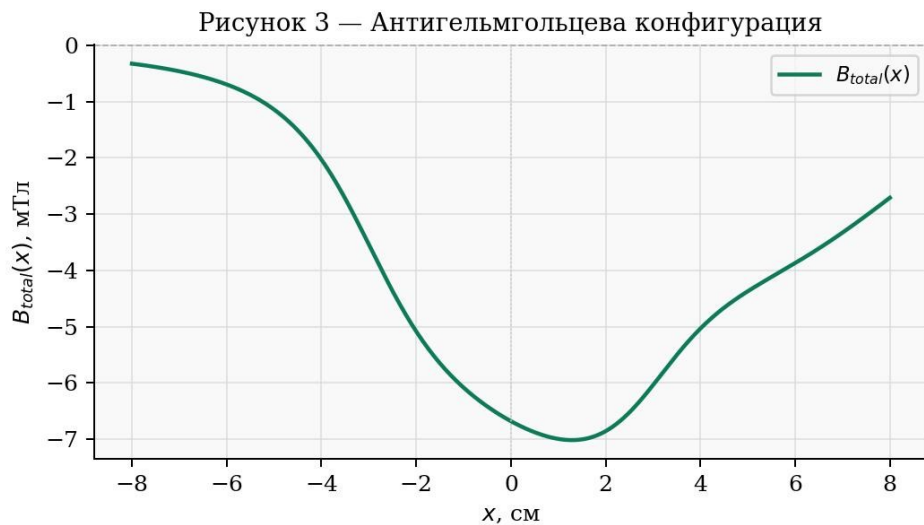


Рисунок 3 –  $B_{total}(x)$  для антигельмгольцевой конфигурации ( $d = 6$  см)

#### 5. Числовой градиент $\partial B/\partial x$

На рисунке 4 приведён числовой градиент  $\partial B/\partial x$  вдоль оси катушки, вычисленный как центральная разностная производная. Пунктирная линия соответствует значению  $k = 6.17$  мТл/м, полученному методом linfit.

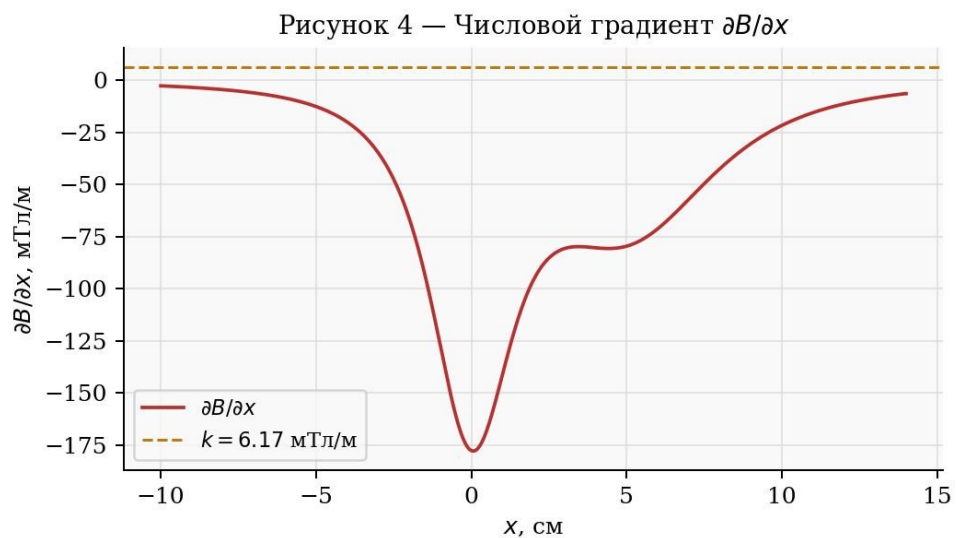


Рисунок 4 – Числовой градиент  $\partial B/\partial x$  вдоль оси катушки

## 6. Сводная таблица параметров модели

Таблица 1 – Параметры модели и результаты расчёта

Параметр	Значение	Единица
Ток в катушке I	5	А
Плотность намотки n	1000	вит/м
Внутренний радиус a	2.0	см
Внешний радиус b	4.39	см
Полудлина катушки h	5.0	см
Участок линейности	[1.2; 2.0]	см
Градиент k (linfit)	6.17	мТл/м
Свободный член $c_0$	-3.7	мТл

## Заключение

В работе показано, что среда Mathcad является эффективным инструментом для расчёта и визуализации магнитных полей катушек с током. На основе аналитической формулы (1), полученной из закона Био–Савара, построен график осевой компоненты индукции  $B(x)$ , выявлен участок линейного роста функции и вычислен градиент поля  $\partial B/\partial x \approx 6.17$  мТл/м методом linfit.

Рассмотрена антигельмгольца конфигурация пары катушек, обеспечивающая нулевую индукцию в центре системы. Построена карта числового градиента  $\partial B/\partial x$  вдоль оси симметрии. Полученные результаты подтверждают высокую наглядность и эффективность применения Mathcad в учебном процессе [1].

## Список использованных источников:

1. Дьяконов В.П. *Mathcad 2001* / В.П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 624 с.
2. Vlaardingerbroek M.T. *Magnetic Resonance Imaging* / M.T. Vlaardingerbroek, J.A. den Boer. – Berlin : Springer, 2003. – 521 p.
3. Bücke S. *Evaporative Cooling and Bose-Einstein Condensation* : дис. ... PhD / S. Bücke. – Freiburg : Universität Freiburg, 2010. – URL: <https://freidok.uni-freiburg.de/fedora/objects/freidok:7695>
4. Griffiths D.J. *Introduction to Electrodynamics* / D.J. Griffiths. – 4th ed. – Cambridge : Cambridge University Press, 2017. – 599 p.
5. Clayton R.P. *Introduction to Electromagnetic Fields* / R.P. Clayton, K.W. Whites, S.A. Nasar. – N.Y. : WCB/McGraw-Hill, 1998. – 758 p.

UDC 537.6:004.94

## MODELING OF A GRADIENT MAGNETIC FIELD IN THE MATHCAD PACKAGE

Solovyov A.L., student

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Grigoriev A.A. – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

**Annotation.** The paper discusses the method of calculating and visualizing the gradient magnetic field of a current-carrying coil in the Mathcad computer mathematics package. The formulas for calculating the axial component of magnetic induction are presented, and graphs of the  $B(x)$  function and the vector field are constructed. The application of the anti-Helmholtz coil configuration for generating a field with zero induction in the center is demonstrated. The linear approximation of the gradient field using the least squares method in Mathcad is examined.

**Keywords.** magnetic field, induction gradient, current coil, anti-Helmholtz, Mathcad, modeling, visualization.