

УДК 519.816:159.9.019.43

ИССЛЕДОВАНИЕ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ПРИМЕРЕ ПОВЕДЕНЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Красикова О. В, Михед А. В. студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л. В. – старший преподаватель

Аннотация. В данной работе рассматриваются основы теории принятия решений и функции полезности. Исследуется связь с математическим анализом через понятия производной, дифференциала, выпуклости и вогнутости функций, условий экстремума. Анализируются психологические факторы, влияющие на принятие решений: теория перспектив Канемана-Тверски, эффект фрейминга, неприятие потерь. Проводится эмпирическое исследование в форме опроса студентов БГУИР для выявления их отношения к риску и временным предпочтениям. Результаты опроса сопоставляются с теоретическими моделями, демонстрируя возможность описания психологических феноменов математическим языком.

Ключевые слова. Теория принятия решений, функция полезности, математический анализ, теория перспектив, неприятие потерь, коэффициент λ , гиперболическое дисконтирование, эффект фрейминга, взвешивающая функция вероятности, эмпирическое исследование, студенческая выборка.

Введение. Каждый день мы принимаем множество решений. Как мы делаем этот выбор, почему в похожих ситуациях разные люди поступают по-разному объясняет психологическая наука. Однако можно ли математически описать процесс принятия решений, предсказать его таким образом? Существует теория принятия решений, связывающая поведенческую психологию и математический анализ.

Центральным понятием этой теории является функция полезности – математическая функция, которая отражает предпочтения человека. Понятия производной (скорость изменения полезности), второй производной (ускорение изменения, выпуклость и вогнутость), нахождение максимума функции – все это позволяет описывать такие важные характеристики, как отношение человека к риску. Можно сказать, что математический анализ дает язык, на котором мы описываем измерение удовлетворения человека.

Также поведенческая экономика описывает нарушения классической рациональности математическими средствами. Теория перспектив Канемана и Тверски (1979 г.) предлагает нелинейную функцию полезности с изломом в нуле и взвешивающую функцию вероятности.

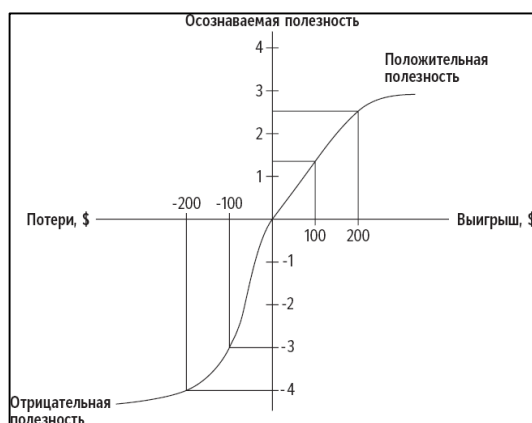


Рисунок 1 - Пример стандартной функции полезности Канемана-Тверски

Данная работа посвящена эмпирической проверке этих математических моделей на выборке студентов технического вуза.

Цель исследования – количественно оценить параметры математических моделей принятия решений: знак второй производной функции полезности в областях потерь и выигрышей, коэффициент неприятия потерь λ , соответствие экспоненциальной и гиперболической моделей дисконтирования, наличие эффекта фрейминга, степень искажения вероятностей.

Задачи:

- Изучить основные математические подходы к описанию принятия решений, опираясь на аппарат математического анализа;
- Рассмотреть психологические факторы, влияющие на выбор;
- Провести опрос среди студентов и проанализировать, насколько их решения соответствуют теоретическим моделям.

Основной текст. Классическая теория ожидаемой полезности предполагает линейность функции полезности или постоянный знак второй производной. Теория перспектив вводит кусочно-заданную функцию. Обычно мы рассматриваем ситуации, где x – количество денег или благ. Тогда $U(x)$ – функция, которая показывает, как полезность зависит от количества.

$$U(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Математический анализ этой функции выявляет три главных свойства:

1. *Различная кривизна.* Для $x > 0$ вторая производная $v''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} < 0$ (вогнутость). Для $x < 0$ $v''(x) = -\lambda\beta(\beta-1)(-x)^{\beta-2} > 0$ (выпуклость).
2. *Излом в нуле.* Левосторонняя и правосторонняя производные не равны: $v'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$ (справа), $v'(x) = \lambda\beta(-x)^{\beta-1}(-1) \rightarrow -\infty$ (слева). Крутизна излома определяется коэффициентом λ .
3. *Убывающая чувствительность к изменению поведения.* При $\alpha, \beta < 1$ предельная полезность убывает при удалении от нуля.

Теперь более подробно рассмотрим некоторые положения *теории перспектив*. Теория перспектив говорит, что люди в краткосрочном периоде менее терпеливы, чем в долгосрочном. Это отражено в гиперболической модели. Но существует также и экспоненциальная модель, которую опровергает теория перспектив.

Экспоненциальная модель: $U(A) = Ae^{-(rt)}$ (постоянная ставка дисконтирования). Человек обесценивает будущее с одной и той же скоростью всегда. Ему всё равно, ждать месяц или год – «скидка» на ожидание одинаковая.

Гиперболическая модель: $U(A) = A / (1 + kT)$ (убывающая ставка). Человек очень нетерпелив в ближайшем будущем, но становится терпеливым в далеком будущем. Скорость обесценивания падает со временем.

Также из теории перспектив рассмотрим *эффект фрейминга*. Люди по-разному реагируют на одну и ту же ситуацию, если описать её в позитивных или негативных «тонах». Один из самых известных экспериментов Канемана и Тверски демонстрирует эффект фрейминга – это психологический феномен, который показывает, что форма подачи информации влияет на решение человека сильнее, чем сама информация. Математический анализ здесь показывает, как словесная формулировка меняет «систему координат» в голове, угол наклона нашей чувствительности и направление изгиба нашего отношения к риску. На свойствах функции полезности разница формулировок отразится следующим образом:

- 1) Сдвинется точка отсчета. Формулировка задачи смещает «ноль» (точку отсчета), поэтому одни и те же объективные числа воспринимаются то как выигрыш, то как потеря;
- 2) Излом функции (первая производная): график для потерь круче, чем для выигрышей (коэффициент непринятия потерь $\lambda > 1$). Разница формулировки “перебрасывает” нас через этот излом, меняя остроту реакции;
- 3) Сменится кривизна (вторая производная). Для выигрышей функция вогнута (избегание риска), для потерь – выпукла (стремление к риску). Фрейминг переносит задачу из одной области в другую, переключая тип поведения.

Существует формула МакНемара для зависимых (в нашем случае от формулировки) выборов. Она нередко применяется для оценивания эффекта фрейминга:

$$x^2 = \frac{(b - c)^2}{(b + c)} \quad (2)$$

Коэффициент непринятия потерь – это параметр, отражающий степень асимметрии в восприятии индивидом потенциальных потерь и выигрышей, характерную для теории перспектив. Он показывает, во сколько раз психологическое воздействие (чувствительность) убытков превосходит воздействие эквивалентных по величине приобретений. Формульное выражение для расчета коэффициента λ в стандартной парадигме (при условии $\alpha = \beta$ для упрощения) выводится из соотношения полезностей и имеет вид:

$$\lambda = -\frac{U(-x)}{U(x)} \quad (3)$$

Существует ещё понятие *отношения людей к риску*. Отношение людей к риску определяется знаком второй производной функции ценности $v(x)$ и формой функции весов вероятностей. Для выигрышей ($x > 0$) функция вогнута ($v''(x) < 0$). Полезность растёт замедляющимся темпом. Для потерь ($x < 0$) функция выпукла ($v''(x) > 0$). Убытки ощущаются с ускоряющейся тяжестью.

Оценка вероятности. В теории перспектив люди используют не объективные вероятности p , а весовую функцию $w(p)$. Одна из распространенных форм (для случая выигрышей):

$$W(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (4),$$

где γ – параметр искажения (обычно $0 < \gamma < 1$).

Свойства данной функции:

- Переоцениваются малые вероятности ($w(p) > p$ для малых p);
- Недооцениваются средние и высокие вероятности ($w(p) < p$ для умеренных и высоких p);
- Чувствительность к изменениям падает по мере удаления от границ 0 и 1.

Дело в том, что люди плохо понимают вероятность как математическую величину. Шанс 1% выиграть «джекпот» кажется гораздо более весомым, чем он есть на самом деле. Отсюда и появляется желание играть в азартные игры. Шанс (условно) 99% на успех оставляет неприятный осадок страха перед (условно) 1% неудачи, заставляя человека перестраховываться.

Методика проведения исследования. Опрос студентов БГУИР решает следующие математические задачи: сначала определить знак $v''(x)$ в областях потерь и выигрышей, далее вычислить коэффициент λ из уравнения безразличия, потом сравнить экспоненциальную и гиперболическую модели дисконтирования, проверить гипотезу об инвариантности (эффект фрейминга) формулой МакНемара и оценить нелинейность $\pi(p)$ для малых вероятностей.

В ходе проведения эксперимента проведен анонимный опрос среди 60 студентов первого курса БГУИР. Респонденты ответили на 8 вопросов, моделирующих стандартные поведенческие задачи.

Проведение опроса и результаты. Выявляем отношение к риску и кривизну функции полезности. **Вопрос 1 (выигрыши).** Что вы выберете? Получить гарантированно 1000 руб. или сыграть в лотерею: получить 2000 руб. или ничего с шансами 50/50? Результат: гарантию выбрали 72%, потерю – 28%. Математическое ожидание одинаково (1000 руб.). Присутствует преобладание гарантии доказывает вогнутость функции в области выигрышей: $v''(x) < 0$ для $x > 0$.

Вопрос 2 (потери). Что вы выберете? Потерять 500 руб. Или сыграть в лотерею: потеря 1000 руб. или не потерять ничего с шансами 50/50? Результат: гарантию выбрали 23%, потерю – 77%. Преобладает риск, что доказывает выпуклость функции в области потерь: $v''(x) > 0$ для $x < 0$.

Узнаем коэффициент неприятия потерь. **Вопрос 3.** При какой минимальной сумме X вы согласны играть в игру с 50% выигрыша X и 50% проигрыша 500 руб.? Среднее арифметическое всех полученных ответов: $X = 1250$ руб. Составляем уравнение безразличия: $0.5 * v(1250) + 0.5 * v(-500) = 0$. Подставляя степенную форму и полагая $\alpha = \beta \approx 0,88$ (коэффициент 0,88 – это константное значение параметра чувствительности (α и β) в степенной функции ценности Канемана и Тверски), получаем: $\lambda = (1250/500)^{0,88} = 2,50,88 \approx 2,25$. Коэффициент неприятия потерь $\lambda \approx 2.25$. Потеря 500 руб. ощущается в 2.25 раза сильнее выигрыша 500 руб.

Теперь определим временные предпочтения. **Вопрос 4.** Что бы вы выбрали? Получить 500 руб. сегодня или 550 руб. через месяц? Результат: сегодня – 44%, через месяц – 56%.

Вопрос 5. Что бы вы выбрали? Получить 500 руб. через год или 550 руб. через год и месяц? Результат: через год – 22%, через год и месяц – 78%. Интервал ожидания одинаков (месяц), добавка одинакова (50 руб.). При экспоненциальном дисконтировании доли должны совпадать. Наблюдаемое различие (44% против 22%) доказывает гиперболический характер дисконтирования: ставка убывает со временем.

Далее проверим эффект фрейминга. **Вопрос 6.** Представьте, что вы потеряли 500 руб. по дороге в кино. Купите ли билет за 500 руб.? Результат: да – 23%, нет – 77%.

Вопрос 7. Представьте, что вы потеряли купленный билет за 500 руб. Купите ли новый? Результат: да – 30%, нет – 70%. Итоговая ситуация идентична: минус 500 руб. и отсутствие билета. Применяем критерий МакНемара для зависимых выборок:

$$\chi^2 = (b - c)^2 / (b + c);$$

$$\chi^2 = (23-30)^2 / (23+30) = 49/53 \approx 0,04.$$

Разница между 23% и 30% пренебрежимо мала ($p < 0,05$). Эффект фрейминга не подтвержден. Классическая инвариантность выполняется.

Следующим шагом идёт оценка вероятностей. **Вопрос 8.** Приз 10000 руб., вероятность 1%. Сколько готовы заплатить за билет? Средний ответ: 250 руб. Математическое ожидание: 100 руб. Отношение субъективной цены к объективной: $250/100 = 2.5$. Это прямое свидетельство переоценки малых вероятностей: $\pi(0,01) > 0,01$. Нелинейность весовой функции подтверждается.

Результаты исследования говорят о следующем:

1) Кривизна функции полезности. Подтверждена вогнутость в области выигрышей ($v'' < 0$) и выпуклость в области потерь ($v'' > 0$). Функция имеет разный знак второй производной по разные стороны от нуля;

2) Коэффициент неприятия потерь $\lambda = 2.25$. Потери субъективно значимее выигрышей в 2.25 раза. Полученное значение совпадает с классическими данными Канемана и Тверски;

3) С точки зрения временного дисконтирования, гиперболическая модель описывает выбор лучше экспоненциальной. Доля терпеливых растет с удалением временной точки от настоящего момента;

4) Подтверждения эффекта фрейминга в проведенном исследовании не обнаружено. Студенты технического вуза безразличны к формулировке. Классическая математическая модель инвариантности здесь работает.

По оценке вероятностей, малые (1%) переоцениваются в 2,5 раза относительно математического ожидания. Поэтому весовая функция $\pi(p)$ оказалась нелинейна.

Проанализируем математически полученные данные:

1. Функция полезности студентов БГУИР имеет разрыв первой производной в нуле с отношением крутизны $\lambda = 2.25$.

2. Ставка дисконтирования убывает во времени, что отвергает экспоненциальную модель в пользу гиперболической.

3. Преобразование объективных вероятностей в субъективные нелинейно: $\pi(0,01) \approx 0,06$ (в 6 раз выше объективной).

4. Принцип инвариантности в нашем случае выполняется: выбор не зависит от способа описания задачи.

Заключение. Математические модели теории перспектив получили количественное подтверждение на студенческой выборке. Исключение составил эффект фрейминга, что может объясняться спецификой выборки (студенты технического вуза). Полученные параметры ($\alpha \approx 0,88$, $\lambda \approx 2,25$, гиперболическое дисконтирование) могут использоваться для прогнозирования решений в аналогичных группах.

Математика в теории перспектив выступает не просто инструментом описания, но языком, на котором формулируются базовые закономерности поведения. Поведенческие эффекты сводятся к свойствам функций – их кривизне, точкам разрыва производной, нелинейности преобразования аргументов.

Список использованных источников:

1. Канеман, Д., Тверски, А. Теория перспектив: анализ принятия решений в условиях риска // *Econometrica*. – 1979. – Т. 47. – № 2. – С. 263–292.
2. Канеман, Д. *Думай медленно... решай быстро*. – М.: АСТ, 2014. – 653 с.
3. Тверски, А., Канеман, Д. Выбор, ценности и фреймы // *Психологический журнал*. – 2003. – Т. 24. – № 4. – С. 31–45.
4. Чернов, С. С. Теория принятия решений: учебное пособие. – М.: КНОРУС, 2019. – 256 с. (PDF).
5. Орлов, А. И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2006. – 573 с. (PDF).
6. Кузнецов, Ю. Н. Математические методы в экономике: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 304 с. (PDF).
7. Ширяев, А. Н. Вероятность: учебник для вузов. – М.: МЦНМО, 2007. – 960 с. (PDF).
8. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: УРСС, 2012. – 448 с. (PDF).
9. Ильин, Е. П. Психология риска. – СПб.: Питер, 2012. – 288 с. (PDF).
10. Зубарев, Н. В. Поведенческая экономика и принятие решений // *Вестник МГУ. Серия 6: Экономика*. – 2020. – № 3. – С. 45–62. (PDF).
11. Сидоренко, Е. В. Методы математической обработки в психологии. – СПб.: Речь, 2007. – 350 с. (PDF).
12. Thaler R. Toward a Positive Theory of Consumer Choice // *Journal of Economic Behavior & Organization*. – 1980. – Т. 1. – № 1. – С. 39–60.
13. Laibson D. Golden Eggs and Hyperbolic Discounting // *Quarterly Journal of Economics*. – 1997. – Т. 112. – № 2. – С. 443–478.
14. Поведенческие аспекты теории принятия решений // [<https://cyberleninka.ru/article/n/povedencheskie-aspekty-prinyatiya-resheniy>] (<https://cyberleninka.ru/article/n/povedencheskie-aspekty-prinyatiya-resheniy>). Электронный ресурс. (дата обращения: 17.03.2026).

UDC 519.816:159.9.019.43

DECISION THEORY, UTILITY FUNCTION, MATHEMATICAL ANALYSIS, PSYCHOLOGICAL ASPECTS AND EMPIRE RESEARCH

Krasikova O. V.; Mikhed A. V. students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics¹, Minsk, Republic of Belarus

Lobanok L. V. – PhD in Mathematics

Annotation. This paper examines the fundamentals of decision theory and utility functions. The connection with mathematical analysis is explored through the concepts of derivatives, differentials, convexity and concavity of functions, and extremum conditions. Psychological factors influencing decision making are analyzed, including Kahneman-Tversky prospect theory, the framing effect, and loss aversion. An empirical study is conducted, surveying BSUIR students to determine their attitudes toward risk and time preferences. The survey results are compared with theoretical models, demonstrating the possibility of describing psychological phenomena mathematically.