

УДК 519.6:616-073.756.8

## ЭВОЛЮЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕКОНСТРУКЦИИ И ПОСТОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

*Медюха А.Е., Левоненко Ю.И., студенты*

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь*

*Воронкова Е.В. – старший преподаватель*

**Аннотация.** Рассматривается эволюция численных методов обработки данных в компьютерной томографии (КТ) – от первичной реконструкции изображений до этапов постобработки. Описывается математический аппарат преобразования Радона и принципы работы фильтрованной обратной проекции (ФОП). Особое внимание уделяется современным итеративным алгоритмам (ART, SART, МИР), позволяющим снизить лучевую нагрузку на пациента. Анализируется роль сплайнов в построении точных 3D-моделей анатомических структур. Показано, что развитие КТ неразрывно связано с совершенствованием вычислительной математики.

**Ключевые слова.** Компьютерная томография, численные методы, итеративные методы, преобразование Радона, реконструкция изображений, фильтрованная обратная проекция, итеративные алгоритмы, ART, SART, сплайны.

Современная лучевая диагностика достигла невероятных высот, и компьютерная томография (далее КТ) по праву занимает в ней одно из центральных мест. Однако за каждым диагностическим снимком, на котором врач видит малейшие анатомические детали, стоит не столько работа комплексного аппаратного комплекса, сколько сложнейшая математическая обработка сырых измерений.

В отличие от обычной фотографии, КТ-изображение не получается напрямую. Аппарат измеряет не картинку, а данные об ослаблении рентгеновского излучения при прохождении через тело под разными углами – проекции. Преобразовать этот набор одномерных проекций в детализированное двумерное сечение или трехмерную модель – это классическая обратная математическая задача.

В статье будет прослежена эволюция численных методов, применяемых в КТ. Работа сфокусирована на двух фундаментальных этапах обработки данных:

1. Методы первичной реконструкции: как создать изображение из проекционных данных (от фильтрованной обратной проекции до алгоритмов глубокого обучения).
2. Методы постобработки и анализа: как улучшить, измерить и смоделировать данные на основе полученного изображения, с особым вниманием к роли сплайнов в построении точных 3D-моделей.

Компьютерная томография – это высокотехнологичный метод диагностики. Если обычный рентгеновский аппарат дает одно статичное изображение, то КТ позволяет «заглянуть внутрь» тела. КТ-сканер (его вращающаяся часть – гентри) непрерывно вращается вокруг неподвижного пациента. За один оборот система делает не один, а сотни отдельных замеров. Каждый такой замер – это проекция, одномерный слепок того, как ткани ослабили рентгеновские лучи в конкретный момент под конкретным углом. Именно этот массив проекций с разных углов и составляет сырье для детализированного объемного изображения.

Процесс КТ-исследования можно представить как конвейер преобразования данных. Первичным продуктом сканирования являются входные данные – сырая синограмма, то есть первичный необработанный цифровой результат измерений компьютерного томографа, представляющий собой огромный массив чисел. Каждое число соответствует показанию одного детектора в определенный момент времени, под определенным углом. Преобразования массива чисел в набор поперечных срезов тела заданной толщины (томограмм) или объемную модель называется реконструкцией изображения, и возможно оно только благодаря применению сложных численных методов.

В основе получения каждой проекции в КТ лежит фундаментальный физический закон – закон ослабления рентгеновского излучения (закон Ламберта-Бера):

$$I = I_0 \cdot e^{(-\mu \cdot L)}, \quad (1)$$

где  $I_0$  – исходная интенсивность луча, испускаемого трубок,  $I$  – интенсивность луча, зарегистрированная детектором,  $\mu$  – линейный коэффициент ослабления вещества,  $L$  – толщина пройденного слоя вещества.

На практике тело неоднородно. Поэтому луч проходит через множество тканей с разными линейными коэффициентами ослабления вещества  $\mu$ . В этом случае ослабление описывается линейным интегралом коэффициентов ослабления вдоль пути луча  $s$ , то есть их суммой:

$$p = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \int \mu(x, y) ds. \quad (2)$$

Здесь  $p$  – это и есть значение одной проекции для конкретного луча. Детектор измеряет  $I$ , компьютер вычисляет  $p$ . Совокупность таких значений  $p$  для всех лучей в одном положении гентри образует одну проекцию.

Синограмма – это фундаментальная форма представления всех проекционных данных, полученных за полный оборот сканера. Ее можно представить как двумерную матрицу, где по горизонтальной оси ( $r$ ) отложена координата луча на линейке детекторов. Каждый столбец соответствует одному детекторному элементу. А по вертикальной оси ( $\theta$ ) – отложен угол поворота системы «трубка-детектор». Каждая строка соответствует одной проекции, снятой под определенным углом  $\theta$  в диапазоне от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  [1].

Визуализация реальной синограммы часто дает удивительно упорядоченную картину, напоминающую набор переплетающихся волн или синусоид. При вращении сканера проекция этой точки будет перемещаться по линейке детекторов  $r$ . Ее траектория описывается уравнением:

$$r = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta, \quad (3)$$

где  $(x, y)$  – фиксированные координаты точки в объекте.

Формально процесс получения проекции описывается преобразованием Радона. Это математический оператор, который для функции  $f(x, y)$ , а в нашем случае для распределения коэффициента ослабления  $\mu(x, y)$ , вычисляет ее линейные интегралы вдоль всех возможных прямых линий. Формула преобразования Радона имеет следующий вид:

$$p(r, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - r) dx dy, \quad (4)$$

где  $p(r, \theta)$  – проекция (синограмма), результат измерений,  $f(x, y)$  – искомая функция (изображение, которые мы хотим восстановить),  $\delta(\dots)$  – дельта-функция Дирака. Ее ключевое свойство таково, что она «выбирает» для интегрирования только те точки  $(x, y)$ , которые лежат ровно на прямой линии, заданной уравнением (3). Это математическая запись идеи «интеграла вдоль луча» [2].

Таким образом, работа КТ-сканера – это прямое преобразование Радона изображения в синограмму. Задача реконструкции КТ – это решение обратной задачи. Имея измеренную синограмму  $p(r, \theta)$ , найти исходную функцию  $f(x, y)$ .

Первым и до сих пор важнейшим методом, который дал точное аналитическое решение этой задачи, стала фильтрованная обратная проекция (далее ФОП). Его эффективность основана на связи между преобразованиями Радона и Фурье – теорема о центральном сечении. Она гласит, что одномерное преобразование Фурье проекции, полученной под углом  $\theta$ , в точности равно сечению через центр двумерного преобразования Фурье исходного изображения, взятому под тем же углом  $\theta$ . Математически имеет вид:

$$F_1\{p(r, \theta)\}(\omega) = F_2\{f(x, y)\}(\omega \cos\theta, \omega \sin\theta). \quad (5)$$

Метод ФОП состоит из двух этапов. В первом этапе выполняется фильтрация проекций. Для всех проекций вычисляются 1D Фурье-образы:

$$P(\omega, \theta) = F_1\{p(r, \theta)\}. \quad (6)$$

Полученные образы размещаются как радиальные линии в частотной плоскости, заполняя 2D Фурье-спектр искомого изображения  $F(u, v)$ . Затем остается вычислить обратное 2D преобразование Фурье для получения самого изображения [3].

Простая обратная проекция заключается в проецировании назад каждой измеренной проекции равномерно вдоль линии луча через все пиксели изображения. Повторив это для всех углов и сложив результаты, мы получим реконструкцию, однако изображение будет размытым.

Если представить 2D-пространство Фурье (частотная область), то данные от проекции под разными углами заполняют его в виде набора срезов, проходящих через центр. Плотность заполнения обратно пропорциональна расстоянию от центра  $|\omega|$ . В окрестности центра (низкие частоты) данные «упакованы» плотно, а на периферии (высокие частоты) – редко. Чтобы скомпенсировать это размытие,

перед обратным проецированием каждая проекция должна быть умножена на  $|\omega|$ . Этот множитель называется рам-фильтром (*ramp filter*). Он линейно усиливает высокие частоты, компенсируя их недостаток. При умножении проекций на рам-фильтр происходит фильтрация проекций:

$$Q(\omega, \theta) = P(\omega, \theta) \cdot |\omega|. \quad (7)$$

Далее выполняется обратное 2D Фурье-преобразование:

$$q(r, \theta) = F_1^{-1}\{Q(\omega, \theta)\} \quad (8)$$

На втором этапе происходит обратное проецирование всех отфильтрованных проекций. Для этого каждую отфильтрованную проекцию  $q(r, \theta)$  нужно спроецировать обратно вдоль ее исходных лучей, после этого проинтегрировать результаты по всем углам  $\theta$  от 0 до  $\pi$ :

$$f(x, y) = \int_0^\pi q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (9)$$

Главным достоинством ФОРП была и остается исключительная вычислительная скорость, что обеспечило ей статус клинического стандарта на десятилетие. Однако этот метод обладает существенными недостатками: рам-фильтр усиливает высокочастотный шум, алгоритм требует полного набора проекций, то есть необходима высокая доза облучения, часто порождаются характерные артефакты.

Данные недостатки привели к возвращению и развитию итеративных методов реконструкции, которые с 2000-ых годов стали новым клиническим стандартом.

Первым поколением итеративных методов реконструкции являются методы алгебраической реконструкции *ART*, в частности метод реконструкции с одновременными итерациями *SART*.

Эти методы напрямую исходят из постановки задачи как системы линейных уравнений:

$$Ax = b, \quad (10)$$

где  $A = (a_{ij})$  – проекционная матрица,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор изображения,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  – вектор проекций.

Метод алгебраической реконструкции демонстрирует базовую идею пошаговой коррекции:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{b_i - \langle a_i, x^{(k)} \rangle}{\|a_i\|^2} a_i. \quad (11)$$

На каждой итерации для  $i$ -того луча вычисляется разность между измеренной проекцией ( $b_i$ ) и проекцией, которую бы дало текущее изображение ( $\langle a_i, x^{(k)} \rangle$ ). Вычисленная разность – проекционная ошибка, которая взвешенно распределяется обратно по пикселям, через которые проходит луч, обновляя изображение. Процесс реконструкции представляет собой последовательное уточнение решения.

Однако классический *ART* очень чувствителен к шуму и имеет медленную сходимость, так как корректирует изображение по одному лучу за итерацию. Его модификация – *SART* (метод одновременной алгебраической реконструкции) отличается тем, что одновременно корректируются все лучи, которые попадают на текущую проекцию. Математически он выражается формулой:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} + \lambda \frac{\sum_{p_i \in P_\phi} (p_i - \sum_{l=1}^N a_{il} x_l^{(k-1)})}{\sum_{p_i \in P_\phi} a_{il}}. \quad (12)$$

Для всех лучей, соответствующих проекции под углом  $\phi$ , рассчитывается разность между реальными данными  $p_i$  и их текущей оценкой, полученной прямым проецированием текущего приближения ( $\sum_{l=1}^N a_{il} x_l^{(k-1)}$ ). Эта величина представляет собой проекционную ошибку.

Вычисленная ошибка суммируется по всем пикселям  $p_i$ , принадлежащим данной проекции  $P_\phi$ , и нормируется суммарный вес этих лучей при помощи весового коэффициента  $a_{il}$ . Данный коэффициент указывает, насколько сильно воксель с индексом  $j$  вносит свое значение в пиксель  $i$ , и полученная поправка вносится одновременно во все воксели  $x_j$ .

В данном уравнении  $\lambda$  является заранее заданным параметром релаксации. Этот параметр позволяет добавить поправку частично, чтобы избежать резких скачков. Для достижения плавного и стабильного процесса его значение обычно  $0 < \lambda < 2$ .

Главное преимущество *SART* по отношению к классическому методу алгебраической реконструкции заключается в том, что он практически полностью устраняет полосовые артефакты [4].

Однако современные клинические алгоритмы, такие как модельная итеративная реконструкция (МИР), кардинально улучшили подход. Это не один алгоритм, а целый класс статистических итерационных методов, которые включают модель физики процесса и априорные знания об изображении. Данный метод не просто решает систему (10), он ищет такое изображение  $x$ , которое максимально правдоподобно с точки зрения модели данных. Учитывается не только геометрия, но и статистика шума (например, Пуассоновский шум в рентгеновских лучах), рассеяние, ослабление. В данном методе также создается априорная модель изображения (регуляризация): заранее задается ожидание, что настоящее изображение должно обладать однородностью в пределах тканей, иметь четкие границы и не иметь ложных осцилляций [1].

Данный метод обладает высоким качеством итогового изображения при низкой дозе. Это позволяет значительно (до 50-60%) снизить дозу облучения пациента без потери диагностического качества, так как алгоритм эффективно подавляет шум. Также изображение не подвергается артефактам практически полностью.

И последний рубеж развития – интеграция физических моделей с искусственным интеллектом. Глубокие нейронные сети обучаются на парах «зашумленные/неполные данные – качественное изображение». Они могут либо выполнять постобработку изображений, полученных традиционными методами, либо выполнять прямую реконструкцию данных за один подход, что потенциально невероятно быстро.

Итак, полученного в результате реконструкции КТ-изображения не всегда достаточно. Для принятия клинических решений врачу часто требуется не просто визуальная оценка среза, а точные количественные данные, трехмерные модели и сравнение во времени.

Постобработка – это набор численных методов, которые превращают сырое диагностическое изображение в структурированные, измеримые и пригодные для сложного анализа данных.

Даже современные алгоритмы могут оставлять шум или артефакты. Для их подавления используют фильтры. Они делятся на простые и новейшие [1].

К простым фильтрам относятся:

1. Фильтр Гаусса, который создает легкое размытие, эффективно убирая мелкий шум, но также размывает важные границы.
2. Медианный фильтр, который заменяет значение пикселя средним значением его соседей, отлично справляется с импульсным шумом.

К новейшим фильтрам относятся:

1. Двусторонний фильтр, который совершает «умное» размытие путем усреднения только тех пикселей, которые близки не только в пространстве, но и по значению яркости.
2. Вейвлет-преобразование, которое раскладывает изображение на компоненты разных частот и локаций. Позволяет точно ослабить шумы и заново собрать изображение с минимальной потерей деталей.

Фильтрация решает лишь часть задач постобработки, но для работы с формой и геометрией требуются иные математические инструменты. Именно для этого используются сплайны.

Сплайны – это гладкие параметрические кривые и поверхности, определяемые контрольным набором точек. Их ключевым свойством является гладкость, то есть заданная степень непрерывности, и локальность управления, то есть перемещение одной контрольной точки сплайна влияет только на близлежащий участок кривой. Принцип построения сплайна таков, что кривая не обязана проходить через все контрольные точки, вместо этого она притягивается к ним, формируя плавную траекторию, а положение и вес точек определяют итоговую форму.

Фундаментальным типом сплайнов является *B*-сплайн, представленные на рисунке 1. Кривая определяется степенью  $p$ , которая управляет гладкостью, например, степень 1 – ломаная, степень 3 – гладкая кривая без изломов, и набором контрольных точек  $P_i$ .

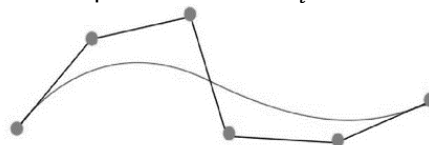


Рисунок 1 – Пример *B*-сплайна

Математически кривая – это взвешенная сумма базисных функций  $N_i, p(u)$ :

$$C(u) = \sum (N_i, p(u) \cdot P_i, \quad (13)$$

где параметр  $u$  пробегает по длине кривой.

Именно благодаря описанным математическим свойствам сплайны занимают центральное место в ключевых задачах медицинского анализа.

Например, реконструкция гладких 3D-поверхностей для планирования вмешательств. Этот процесс представляет собой последовательный конвейер перехода от сырых срезов к готовой для инженерных расчетов математической модели. После сегментации стопки поперечных КТ-срезов получается не изображение, а набор контурных кривых, лежащих в параллельных плоскостях. Сплайны идеально подходят для построения гладкой оболочки, проходящей через эти контуры. Алгоритм интерполирует или аппроксимирует данные, создавая единую математическую модель органа. Эта модель может быть визуализирована для оценки, экспортирована в форматы *SRL* для 3D-печати персонализированного хирургического шаблона или импланта и использована для компьютерного моделирования.

Таким образом, сплайны выступают в роли универсального языка для описания геометрии, связывающего этап анализа изображения с этапами количественной оценки, моделирования и динамического сравнения.

Компьютерная томография как технология является прямым воплощением современной вычислительной математики. От первичных измерений до конечных клинических решений – каждый шаг определяется численными методами.

Эволюция численных методов в КТ – это история о том, как абстрактная математика, например преобразования Радона и Фурье, итерационные методы и аппроксимация сплайнами – становится материальной в медицине. Понимание этой эволюции и лежащих в ее основе принципов необходимо не только разработчикам алгоритмов, но и врачам-диагностам, позволяя критически оценивать возможность технологии корректно интерпретировать ее результаты и в полной мере использовать ее потенциал для спасения жизней.

**Список использованных источников:**

1. Наттерер, Ф. *Математические аспекты компьютерной томографии* / Ф. Наттерер; пер. с англ. И. В. Паламодова; под ред. В. П. Паламодова. — Москва : Мир, 1990. — 279 с.
2. «Современные виды томографии». *Booksifmo*, 2006. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://books.ifmo.ru/file/pdf/118.pdf>
3. «Методы фильтрации изображений в рентгеновской компьютерной томографии». *Киберленка*, 2014. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/metody-filtratsii-izobrazheniy-v-rentgenovskoy-kompyuternoy-tomografii>
4. «Трехмерная реконструкция изображений методом SART с минимизацией тотальной вариации». *Rep.bntu*, 2015. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://rep.bntu.by/bitstream/handle/data/20162/31-35.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

UDC 519.6:616-073.756.8

## EVOLUTION OF NUMERICAL METHODS FOR IMAGE RECONSTRUCTION AND POST-PROCESSING IN COMPUTED TOMOGRAPHY

*Mediukha A.E., Liavonenko Y.I., students*

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics  
Minsk, Republic of Belarus*

*Voronkova E.V. – Senior Lecturer*

**Annotation.** The article examines the evolution of numerical methods for data processing in computed tomography (CT) – from primary image reconstruction to post-processing stages. The mathematical apparatus of the Radon transform and the operating principles of filtered back projection (FBP) are described. The much attention is given to modern iterative algorithms (ART, SART, IRM), which allow reducing the radiation dose to the patient. The role of splines in constructing accurate 3D models of anatomical structures is analyzed. It is shown that the development of CT is inextricably linked with the improvement of computational mathematics.

**Keywords.** Computed tomography, numerical methods, iterative methods, Radon transform, image reconstruction, filtered back projection, iterative algorithms, ART, SART, splines.