

УДК 517.927

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Василенко Д.В., Халамов Н.А., студенты

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь*

Анисимов В.Я. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация: В данной работе рассмотрены различные проекционные методы решения краевых задач дифференциальных уравнений. Проведено сравнение методов по различным метрикам и выявлены преимущества модификации Малышева обобщенного метода Галеркина по сравнению с классическими методами. Сформулированы рекомендации по выбору метода в зависимости от типа уравнения.

Ключевые слова: невязка, проекция, краевая задача, базис, коэффициенты.

Численные методы решения дифференциальных уравнений играют важную роль в математическом моделировании физических, технических и инженерных процессов. Во многих практических задачах аналитическое решение дифференциальных уравнений либо невозможно получить в явном виде, либо оно оказывается слишком сложным для использования. В таких случаях применяются приближенные методы, позволяющие находить решения с заданной точностью.

Проекционные методы – это численные методы решения дифференциальных уравнений, основанные на поиске приближенного решения в виде конечной линейной комбинации базисных функций (проекция на конечномерное подпространство). Решение удовлетворяет уравнению в среднем (по принципу ортогональности невязки), что позволяет свести дифференциальную задачу к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

К этому классу относятся метод Галеркина, метод коллокаций и метод наименьших квадратов. В методе Галеркина невязка ортогональна базисным функциям, в методе коллокаций она обращается в нуль в выбранных точках, а в методе наименьших квадратов минимизируется норма невязки.

Классические методы требуют больших затрат на вычисления. Для сложных дифференциальных уравнениях это становится серьезным препятствием. М. В. Малышев предложил модификацию, которая позволяет избежать прямого вычисления этих интегралов за счет использования специальных свойств невязки и ее производных. Идея базируется на условии минимизации невязки путем требования, чтобы средняя невязка на отрезке и средние значения ее производных обращались в нуль. Составляется следующая система:

1. $\int_0^1 R_m(x) dx = 0$
2. $\int_0^1 R'_m(x) dx = R_m(1) - R_m(0) = 0$
3. $\int_0^1 R^{(j-1)}_m(x) dx = R^{(j-2)}_m(1) - R^{(j-2)}_m(0) = 0$

Интегрирование заменяется вычислением разности производных в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Были рассмотрены различные типы дифференциальных уравнений. Произведен анализ эффективности различных комбинаций методов, базисов и типов уравнений:

1. Уравнение Пуассона.

$$-U''(x) = \pi^2 * \sin(\pi x); U(0) = U(1) = 0; x \in (0,1)$$

При выборе тригонометрического базиса, где $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$ все методы продемонстрировали быструю сходимость, т.к. точное решение данного уравнения $U(x) = \sin(\pi x)$ точно представимо в выбранном тригонометрическом базисе.

Рассматривая полиномиальный базис при разном количестве базисных функций, мы получим различные результаты. С увеличением количества базисных функций среднеквадратичная оценка погрешности, используемая для оценки погрешности, уменьшается.

Приведем графики построенных приближенных решений относительно известного точного решения:

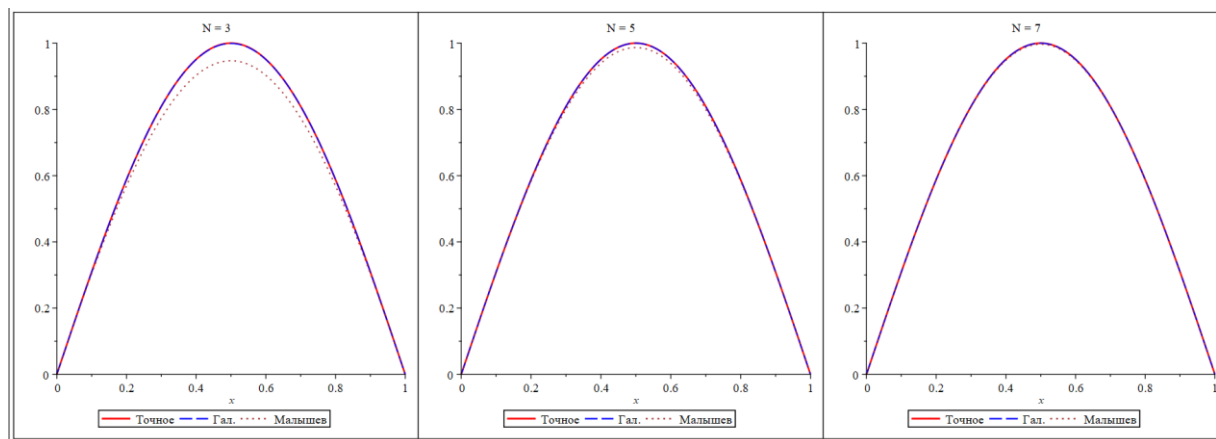


Рисунок 2 – Графики решений различными методами

В результате видно, что все методы проявляют большую точность при увеличении числа базисных функций. Модификация Малышева при малых n даёт несколько более высокую погрешность, однако с ростом числа базисных функций её точность быстро возрастает и становится сопоставимой с другими методами. Метод Галеркина при данном типе уравнения показывает наилучшие результаты, метод коллокации и МНК близки по точности.

2. Осциллирующее ДУ.

$$-U''(x) = 100 \sin(10x); U(0) = U(1) = 0; x \in (0,1)$$

На рассматриваемом примере с сильно осциллирующей правой частью уравнения особенно наглядно проявляется влияние выбора базисных функций на скорость сходимости приближённого решения. Тригонометрический базис демонстрирует высокую эффективность уже при малом числе членов разложения, поскольку его структура естественным образом согласована с волновым характером решения. Полиномиальный базис требует существенно большего числа функций для достижения сопоставимой точности, так как полиномы низких степеней не обладают достаточным количеством точек перегиба для описания высокочастотных колебаний на конечном интервале. Заметное визуальное приближение к точному решению возникает только при увеличении числа базисных функций.

Классические проекционные методы – метод коллокации, метод наименьших квадратов и метод Галеркина – демонстрируют близкие по порядку результаты точности при использовании одинакового базиса. Их объединяет то, что условия аппроксимации накладываются на невязку во всей области определения: либо в интегральном смысле, либо в наборе внутренних точек интервала. Благодаря этому учитывается глобальное поведение решения, включая внутреннюю осциллирующую структуру.

Особый интерес представляет обобщённый метод Галеркина в модификации М.В. Малышева. Данный подход заменяет часть интегральных условий условиями, связанными со значениями производных невязки на границах области, что позволяет существенно упростить вычисления и уменьшить объём интегрирования. В отличие от классического метода Галеркина, условия ортогональности невязки формулируются не полностью в интегральной форме, а частично через граничные соотношения.

Проведённые вычисления показывают, что при использовании устойчивого ортогонального базиса метод Малышева демонстрирует сходимость и обеспечивает уменьшение среднеквадратичной ошибки при увеличении числа базисных функций. Характер сходимости отличается от классических интегральных проекционных методов: поскольку часть условий формируется на границах интервала, метод оказывается более чувствительным к выбору базиса, и для достижения той же точности может потребоваться большее число базисных функций по сравнению с классическим методом Галеркина. Однако выигрыш в вычислительных затратах на формирование матрицы системы делает эту модификацию привлекательной для задач, где требуется многократное решение при различных параметрах.

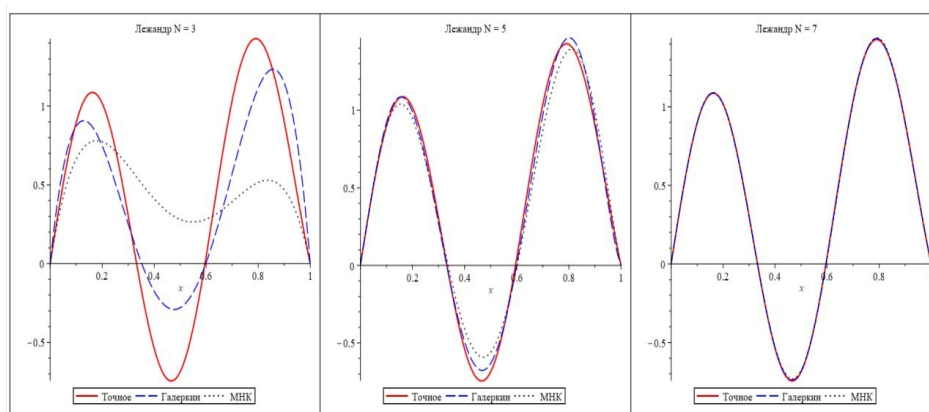


Рисунок 3 – Графики приближенных решений различными методами

Метод Малышева следующим образом работает при увеличении числа базисных функций:

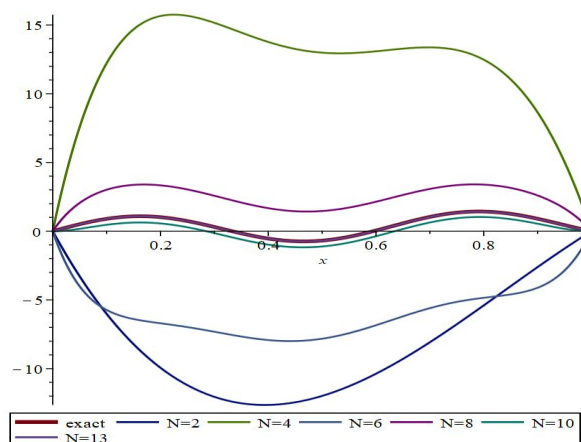


Рисунок 4 – Решение с использованием метода Малышева

3. Уравнение с пограничным слоем.

$$-\varepsilon U''(x) + U' = 1; U(0) = U(1) = 0; x \in (0,1); \varepsilon = 0.01$$

Метод Галеркина продемонстрировал сходимость с увеличением числа базисных функций. Полиномы Чебышева показали преимущество над тригонометрическим базисом для данного класса задач. Модификация Малышева также обеспечила уменьшение погрешности при увеличении числа базисных функций, однако потребовала аккуратного вычисления производных высших порядков. При большом числе базисных функций может наблюдаться рост чувствительности к ошибкам округления, что связано с общим ухудшением обусловленности матрицы системы – это особенность многих проекционных методов при использовании полиномиальных базисов высокого порядка, а не недостаток конкретно метода Малышева. Метод наименьших квадратов показал хорошую устойчивость при приемлемом числе обусловленности.

Таким образом, для уравнений с пограничным слоем метод Галеркина с базисом Чебышева отработал эффективно. Модификация Малышева может быть применима при необходимости снижения вычислительных затрат, но требует контроля точности вычислений производных.

4. Уравнение 4-го порядка.

$$u''''(x) = \sin(\pi x), x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, u'(0) = u'(1) = 0.$$

Для решения краевых задач второго и четвертого порядка традиционные методы требуют аккуратного выбора базисных функций, удовлетворяющих всем граничным условиям. В частности, для уравнений четвертого порядка стандартные полиномиальные базисы оказываются недостаточно гибкими, и необходимо использовать модифицированные функции, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям.

Тригонометрический базис автоматически удовлетворяет множественным граничным условиям и показал наилучшую сходимость для всех методов. Все методы продемонстрировали монотонное уменьшение погрешности с увеличением числа базисных функций. Модификация Малышева показала приемлемую точность при заметно меньших затратах на вычисление коэффициентов системы, однако потребовала аккуратного вычисления производных высоких порядков базисных функций. Таким образом, модификация метода Малышева является эффективным компромиссом между точностью решения и сложностью вычислений, особенно для задач с высокими порядками дифференциальных операторов.

N	RMS error
2	2.6726529792e-04
4	1.8636344276e-05
6	7.0001379647e-07
8	1.6525581835e-08
10	1.2126957335e-09

Рисунок 5 – Таблица СКО для уравнения 4-го порядка, решенного методом Малышева

Выбор базисных функций оказывает большое влияние на эффективность всех методов. Полиномы Лежандра показали улучшенную обусловленность для метода Галеркина. Полиномы Чебышева рекомендованы для задач с пограничным слоем. Тригонометрические функции показали существенное преимущество для уравнений с тригонометрическими или периодическими решениями. Выбор базисных функций должен осуществляться в соответствии с характеристиками ожидаемого решения.

Классические методы являются надёжным инструментом для практического применения. Модификация Малышева демонстрирует сопоставимую точность с классическими методами при значительно меньших вычислительных затратах на формирование матрицы системы, что подтверждает теоретическое преимущество метода. Упрощение выкладок за счёт частичной замены интегрирования дифференцированием обеспечивает снижение объёма вычислений.

Выявлены практические преимущества модифицированного метода Галеркина для различных классов задач. Метод показывает хорошую точность для линейных уравнений с полиномиальными базисами при умеренном числе базисных функций. Для задач, где требуется многократное решение систем с различными параметрами (например, при параметрическом анализе), уменьшенные затраты на формирование матрицы дают существенное преимущество в общей производительности.

При этом следует учитывать, что характер сходимости метода Малышева зависит от выбора базиса: для осциллирующих решений может потребоваться большее число базисных функций по сравнению с классическим методом Галеркина. Однако это не является недостатком метода, а представляет собой особенность, обусловленную его постановкой, и компенсируется вычислительной эффективностью.

Предложенный Малышевым подход появился в конце 1950-х годов, когда экономия вычислительных ресурсов имела решающее значение. Замена интегрирования дифференцированием на границах позволяла решать задачи, недоступные классическому методу Галеркина. Несмотря на развитие вычислительной техники, метод не потерял актуальности: он востребован при многократных пересчётах краевых задач и на платформах с ограниченной производительностью. Таким образом, модификация Малышева сочетает в себе как историческую значимость, так и современную практическую ценность.

Получены количественные оценки точности и сходимости для всех комбинаций метод-базис-тип уравнения, что создаёт основу для обоснованного выбора метода в практических приложениях. Результаты исследования могут быть использованы при разработке программного обеспечения для численного решения краевых задач и при выборе методов для конкретных прикладных задач в механике, физике и инженерных дисциплинах.

Список использованных источников:

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1962.
2. Малышев М.В. Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений обобщенным методом Бубнова-Галеркина для задач механики грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1959. – № 3. – С. 80-84.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Гостехиздат, 1950.

4. Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46. – №. 10. – С. 1871-1881.

5. Леонов А. И. Проекционные методы решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2004. – №. 1 (2). – С. 112-114.

UDC 517.927

COMPARATIVE ANALYSIS OF PROJECTION METHODS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Vasilenko D.V., Khamalov N.A., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Anisimov V.Y. – PhD in Physics and Mathematics

Abstract: This paper discusses various projection methods for solving boundary value problems of differential equations. It compares the methods using different metrics and identifies the advantages of the Malyshev generalized Galerkin method over classical methods. The paper provides recommendations for choosing the method based on the type of equation.

Keywords: residual, projection, boundary value problem, basis, coefficients: residual, projection, boundary value problem, basis, coefficients