

УДК 004.42:616-036.22

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ С УЧЕТОМ ВАКЦИНАЦИИ И СОЦИАЛЬНОЙ УСТАЛОСТИ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ SIR

*Вирбал А.Е., Турчук А.А., студенты*

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь*

*Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент*

**Аннотация.** Описана эпидемиологическая модель SEIRD+F, разработана программная реализация модифицированной эпидемиологической модели с учётом пространственной диффузии, инкубационного периода, смертности в зависимости от пропускной способности системы здравоохранения и социальной усталости. Разработанный комплекс представляет собой интерактивный инструмент для исследования сценариев распространения инфекций и поддержки решений в области здравоохранения.

**Ключевые слова.** Эпидемиология, математическое моделирование, C++, Qt 6, Open MP, модель SEIRD+F, социальная усталость, реакционно-диффузионные уравнения, метод конечных разностей, аппроксимация Лапласиана.

Пандемия COVID-19 стала серьезным испытанием для систем здравоохранения и продемонстрировала необходимость заблаговременной оценки сценариев развития инфекционных заболеваний [1]. Классическая эпидемиологическая модель, такая как SIR, предложенная Кермаком и Маккендриком [2] в 1927 году, заложила фундамент математического описания распространения инфекций. Однако эта модель не позволяет учитывать пространственное распределение популяции, инкубационный период, смертность, а также сложные механизмы формирования повторных волн, наблюдавшиеся в ходе пандемии.

Современные методы вычислений позволяют расширить классические модели путем добавления новых параметров и механизмов взаимодействия, учитывать социальные факторы и особенности поведения людей. Поэтому созданные симуляции становятся более реалистичными.

Основной целью данной работы является программная реализация адаптированной (модифицированной) модели SEIRD+F, которая позволяет более точно описывать динамику распространения инфекций и анализировать влияние различных факторов на развитие эпидемического процесса. В основе исследования лежит метод математического моделирования, реализованный через модификацию модели SIR с учетом фактора социальной усталости (SEIRD+F). Пространственная динамика описывается [3] системой реакционно-диффузионных уравнений.

Классическая модель SIR определяет динамику через систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases}$$

где  $S$  – восприимчивые,  $I$  – заражённые,  $R$  – выздоровевшие,  $N$  – общее количество популяции,  $\beta$  – коэффициент передачи инфекции,  $\gamma$  – коэффициент выздоровления.

Динамика системы зависит от дифференциального уравнения, где скорость определяется начальным количеством представителей каждого класса и значением коэффициентов. Такая модель умеет воспроизводить базовые фазы эпидемий и определяет пороговый критерий возникновения вспышки через базовое репродуктивное число:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Однако система не может учитывать пространственную неоднородность и поведенческую адаптацию, что послужило причиной для расширения стандартной системы.

Для учёта инкубационного периода, смертности, пространственной диффузии и поведенческих факторов базовая модель была расширена до системы уравнений в частных производных [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = D_S \Delta S - \frac{\beta(F)SI}{N}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} = D_E \Delta E + \frac{\beta(F)SI}{N} - \sigma E, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = D_I \Delta I + \sigma E - (\gamma + \mu(H))I, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = D_R \Delta R + \gamma I, \\ \frac{\partial D}{\partial t} = \mu(H)I, \\ \frac{\partial F}{\partial t} = D_F \Delta F + \alpha I - \delta F, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E$  – латентные,  $D$  – умершие,  $F$  – социальная усталость,  $D_S, D_E, D_I, D_R, D_F$  – коэффициенты диффузии,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\beta(F)$  – коэффициент передачи инфекций,  $N$  – общая численность популяции,  $\sigma$  – коэффициент перехода из группы в группу,  $\mu(H)$  – коэффициент смертности,  $\alpha$  – возбуждение,  $\delta$  – демпфирование.

Множители выздоровления и перехода являются обратными величинами к средней длительности инфекционного периода и инкубационного периода соответственно и определяются как:

$$\sigma = \frac{1}{\tau_E},$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_I}.$$

Важной особенностью модели является введение функциональных множителей, описывающих нелинейные зависимости.

Коэффициент заражения от усталости. Функция тангенса выбрана за её свойство плавного насыщения, что соответствует психологическим моделям адаптации [4]:

$$\beta(F) = \beta_0 \left( 1 + k_\beta \cdot th\left(\frac{F}{F_{thr}}\right) \right),$$

где  $\beta_0$  – базовый коэффициент передачи инфекции,  $k_\beta$  – коэффициент чувствительности к усталости,  $F_{thr}$  – пороговое значение социальной усталости.

Линейная зависимость смертности является минималистичным, но эффективным приближением, используемым во многих моделях перегрузки систем:

$$\mu(H) = \mu_0 \left( 1 + k_\mu \cdot \frac{I}{I_{max}} \right),$$

где  $\mu_0$  – базовый коэффициент смертности,  $k_\mu$  – коэффициент чувствительности к перегрузке,  $I_{max}$  – пропускная способность системы здравоохранения.

Динамика усталости. Уравнение аналогично моделям затухающих колебаний [4], где параметр  $\alpha$  – возбуждение, а  $\delta$  – демпфирование:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha I - \delta F.$$

Выполним численную реализацию системы (1) методом конечных разностей на регулярной сетке [5]. Аппроксимация Лапласиана осуществляется с помощью 5-точечного шаблона, обеспечивающего второй порядок точности. Так как оператор Лапласа является суммой частных производных второго порядка по переменным  $x$  и  $y$  дважды, необходимо найти численный аналог каждой из них. Каждая функция была разложена по осям в ряды Тейлора:

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot u'_i + \left(\frac{h^2}{2}\right) \cdot u''_i + \dots, \quad (2)$$

$$u_{i-1} = u_i - h \cdot u'_i + \left(\frac{h^2}{2}\right) \cdot u''_i - \dots, \quad (3)$$

где  $u_i$  – значение функции групп  $S, E, I, R, F$  с индексом  $i$ ,  $h$  – шаг пространственной сетки. Предполагается, что раскладываемая функция достаточно гладкая и имеет непрерывные частные производные до четвёртого порядка, обеспечивающие справедливость разложения.

Далее разложения (2) и (3) были сложены и получено следующее приближенное равенство:

$$u_{i+1} + u_{i-1} \approx 2u_i + h^2 \cdot u''_i,$$

из которого была получена частная производная второго порядка по  $x$  дважды:

$$u_{xx}(x_i, y_i) = \frac{u(x_i+h, y_i) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i-h, y_i)}{h^2},$$

где  $u_{i,j}$  – значение функции группы с индексами  $i$  и  $j$ .

Аналогично была получена частная производная второго порядка по  $y$  дважды:

$$u_{yy}(x_i, y_i) = \frac{u(x_i, y_i+h) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_i-h)}{h^2},$$

и найдена сумма, которая приблизительно равна оператору Лапласа функции  $u$ :

$$\Delta u_{i,j} = u_{xx}(x_i, y_i) + u_{yy}(x_i, y_i) \approx \frac{u(x_i+h, y_i) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i-h, y_i)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_i+h) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_i-h)}{h^2}.$$

Итерационная формула для явного метода требует [5] соблюдения условия устойчивости Куранта для корректной работы:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{D\tau}{h^2(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n)} + \tau \cdot f(u_{i,j}^n),$$

где  $u_{i,j}^n$  – значение функции в узле в текущий момент времени,  $\tau$  – шаг времени,  $f(u_{i,j}^n)$  – правая часть дифференциального уравнения.

Условие устойчивости Куранта гарантирует то, что возмущение не будет распространяться дальше соседних узлов за временной шаг:

$$D \cdot \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{4},$$

где  $D$  – максимальный коэффициент диффузии. Для численного исследования разработанной математической модели был создан специализированный программный комплекс, реализованный на языке C++ с применением фреймворка Qt 6. Архитектура приложения следует принципу разделения ответственности и состоит из двух основных слоёв.

Нижний уровень представляет собой вычислительное ядро, включающее решатель системы уравнений в частных производных, класс пространственной сетки и структуру параметров симуляции. Численная реализация основана на методе конечных разностей с использованием пятиточечного шаблона для аппроксимации оператора Лапласа. Для обеспечения высокой производительности вычислений применена технология параллельного программирования OpenMP.

Верхний уровень представляет собой графический интерфейс на базе Qt 6. Важной особенностью разработанной системы является возможность динамического изменения параметров модели в реальном времени без остановки симуляции. Это открывает возможности для интерактивного исследования сценариев и калибровки модели.

Для повышения реалистичности моделирования реализован редактор карты населения, позволяющий задавать пространственную неоднородность области, зоны карантина с пониженной диффузией, а также размещать начальные очаги заражения в произвольных координатах. Система поддерживает динамический карантин — возможность активации и деактивации ограничительных мер в процессе симуляции с визуальным отображением границ изолированных зон.

Визуализация результатов осуществляется в нескольких взаимодополняющих формах. Тепловые карты отображают пространственное распределение каждой из шести групп ( $S, E, I, R, D, F$ ) с

цветовой кодировкой концентрации. Временные ряды демонстрируют динамику численности каждой группы населения в виде графиков зависимости от модельного времени. Реализована функция сравнения сценариев с наложением «призрачных» кривых от предыдущих запусков. Индикаторы статистики отображают текущие абсолютные и процентные значения всех классов. Это позволяет осуществлять численный контроль процесса симуляции, как показано на рисунке 1.



Рисунок 1 – Отображение вкладки приложения с графиками

Таким образом, программная реализация представляет собой полноценный научный инструмент, который позволяет не только интерактивно исследовать влияние параметров модели, но и визуально наблюдать сложные пространственно-временные эффекты эпидемического процесса.

С целью верификации разработанной модели, а также для демонстрации её возможностей была проведена серия вычислительных экспериментов на пространственной сетке 50×50 узлов при базовых параметрах.

Моделирование введения карантина было выполнено через уменьшение коэффициента диффузии инфицированных. Согласно полученным данным, эпидемическая волна не распространяется свободно по всей расчётной области.

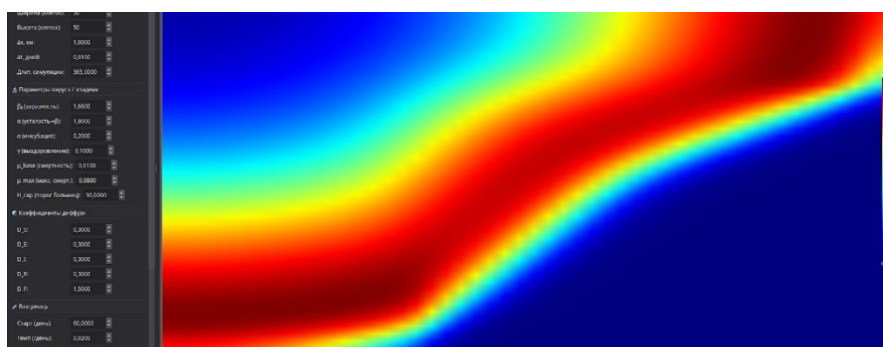


Рисунок 2 – Волна распространения заболевания столкнулась с карантинной зоной

Результаты количественного анализа подтверждают эффективность своевременного введения ограничительных мер: раннее введение карантина позволяет снизить пиковую заболеваемость и общую долю переболевших.

Влияние транспортных коридоров на пространственную динамику эпидемии продемонстрировано на рисунке 3. Согласно визуализации, инфекция, зародившаяся в левой части области, проникает в правый «город» исключительно через транспортный коридор, формируя вторичный очаг.

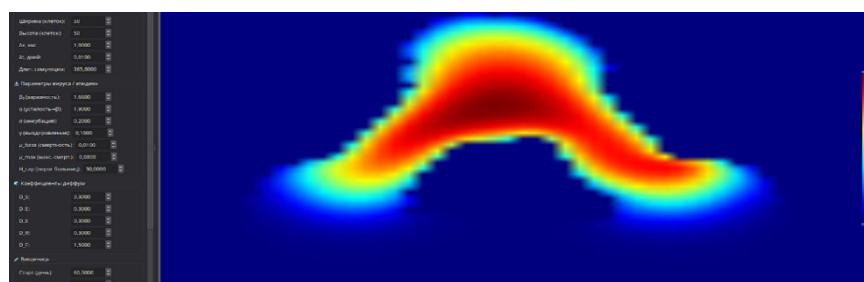


Рисунок 3 – Перемещение заболевания по дорогам

Данный результат согласуется с теоретической оценкой для реакционно-диффузных систем, качественно воспроизводит наблюдавшиеся в реальности закономерности распространения пандемий вдоль трасс и железнодорожных путей, где скорость распространения инфекции возрастает из-за скопления людей, ограниченного пространства и длительности поездок, и обосновывает необходимость дифференцированного контроля перемещений.

Ещё одной ключевой особенностью разработанного программного комплекса является возможность учёта зависимости коэффициента смертности от нагрузки. На рисунке 4 в сценарии с ограниченной ёмкостью количество заражённых создаёт нагрузку на медицинские учреждения, что приводит к увеличению летальных исходов.



Рисунок 4 – Влияние количества заболевших на работоспособность больниц

Одним из наиболее значимых воспроизводимых моделью эффектов является формирование вторичных волн заболеваемости из-за накопления социальной усталости: игнорирования симптомов болезни, нарушения введенных ограничений, снижения бдительности. На рисунке 5 данный эффект качественно согласуется с динамикой пандемии COVID-19, где ослабление ограничительных мер и снижение дисциплины населения приводило к повторным подъёмам заболеваемости даже при наличии частичного коллективного иммунитета.



Рисунок 5 – появление второй волны

Однако, при введении карантинных мер можно добиться значительных результатов в сдерживании распространения заболевания, что отображено в отсутствии второй волны на графике симуляции с теми же параметрами за исключением введения постоянного карантина. Также стоит заметить, что в таком случае величина пика заразившихся людей значительно уменьшилась, как и суммарные потери.

Учёт пространственной неоднородности и поведенческой динамики существенно повышает прогностическую ценность эпидемиологических моделей по сравнению с классическими популяционными моделями.

Разработанный программный комплекс представляет собой готовый инструмент для интерактивного исследования сценариев распространения инфекционных заболеваний и может служить основой для принятия обоснованных решений в области общественного здравоохранения.

Программная реализация позволяет интерактивно исследовать влияние параметров и визуально наблюдать сложные пространственно-временные эффекты, которые невозможно получить в классических моделях разделения на группы.

**Список использованных источников:**

1. *Mathematical modelling of infectious diseases : a guide for public health decision-makers / World Health Organization.* – Geneva : WHO Press, 2022. – 84 p. – URL: <https://www.who.int/publications/i/item/9789240048546> (date of access: 27.03.2026).
2. Kermack, W. O. *A contribution to the mathematical theory of epidemics / W. O. Kermack, A. G. McKendrick // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character.* – 1927. – Vol. 115, № 772. – P. 700–721.
3. Davydovych, V. *Reaction–diffusion equations in mathematical models arising in epidemiology / V. Davydovych, O. Domanskyi // Symmetry.* – 2023. – Vol. 15, № 11. – Art. 2025. – DOI: 10.3390/sym15112025.
4. Funk, S. *Modelling the influence of human behaviour on the spread of infectious diseases : a review / S. Funk, M. Salathé, V. A. A. Jansen // Journal of the Royal Society Interface.* – 2010. – Vol. 7, № 50. – P. 1247–1256. – DOI: 10.1098/rsif.2010.0142.
5. Стригунов, В. В. *Численные методы решения задач математической физики : учеб.-метод. пособие / В. В. Стригунов.* – Минск : БГУИР, 2021. – 156 с.

UDC 004.42:616-036.22

## **MATHEMATICAL MODELING OF INFECTIOUS DISEASE SPREAD WITH VACCINATION AND SOCIAL FATIGUE BASED ON A MODIFIED SIR MODEL**

*Virbal A.E., Turchuk A.A., students*

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus*

*Primicheva Z.N. – PhD in Physics and Mathematics*

**Annotation.** The SEIRD+F epidemiological model is described, and a software implementation of a modified epidemiological model has been developed, taking into account spatial diffusion, incubation period, mortality depending on the capacity of the healthcare system, and social fatigue. The developed software package represents an interactive tool for studying infection spread scenarios and supporting decision-making in healthcare.

**Keywords.** Epidemiology, mathematical modeling, C++, Qt 6, OpenMP, SEIRD+F model, social fatigue, reaction-diffusion equations, finite difference method, Laplacian approximation.