УДК 517.581:004.928

ЧИСЛЕННАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ

Визгин А.П., Финевич А.В., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. В данной работе рассматривается численная стабильность различных методов интегрирования, применяемых для решения уравнений движения в физических симуляциях компьютерных игр. Анализируются методы Эйлера и Рунге-Кутта на примере моделирования динамики твердых тел под действием внешних сил. Выполнено сравнение точности и устойчивости методов, представлены графики поведения системы.

Ключевые слова. Дифференциальные уравнения, численные методы интегрирования, метод Эйлера, метод Рунге-Кутта, устойчивость алгоритма, физическая симуляция, компьютерные игры.

В процессе разработки компьютерных игр возникает необходимость симуляции движущихся объектов. Как правило, движение происходит в соответствии с законами физики. Моделирование этих законов называют физической симуляцией. Одной из основных задач физической симуляции является нахождение траектории движения тела, и следовательно, его координат в фиксированный момент времени.

Рассмотрим некоторую физическую систему, состоящую из одного тела массы m и сил, действующих на него. Тогда тело движется ускоренно и, согласно *второму закону Ньютона,* справедливо равенство:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{a}$ – вектор ускорения тела; $\vec{F}$ – вектор равнодействующей силы. Полагая, что проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{F}$ на ось Ox равны a_x и F_x соответственно, запишем (1) в виде дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x. \tag{2}$$

Аналогичным образом можно получить уравнения движения тела вдоль других осей. Таким образом, векторное равенство (1) определяет систему дифференциальных уравнений. Нахождение траектории движения тела сводится к решению этой системы. Существует бесконечное множество таких решений, искомое решение выделяют с помощью дополнительных условий, которым оно должно удовлетворять. В зависимости от вида таких условий рассматривают три типа задач. Однако мы остановим внимание на задаче с начальными условиями (*задаче Коши*), поскольку именно она играет ключевую роль при моделировании физики в компьютерных играх.

В общем случае найти аналитическое решение уравнения (1) не представляется возможным из-за сложного взаимодействия сил, поэтому применяются различные методы численного интегрирования. Среди них мы рассмотрим наиболее известные: метод Эйлера и Рунге-Кутта 4 порядка.

Метод, использующий известное состояние системы для вычисления следующего состояния напрямую, называют явным. Метод Эйлера (*метод ломаных*) является простейшим явным одношаговым методом [3]. Пусть дана функция $y(t)$ и ее производная $y'(t) = f(t, y(t))$. Выберем значение $h > 0$ для каждого шага вдоль оси t, тогда $t_{n+1} = t_n + h$. Метод Эйлера позволяет вычислить величину y_{n+1} по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \tag{3}$$

В качестве объекта исследования возьмем систему из груза массы $m = 1$ кг, прикрепленного к пружине жесткости $k = 3$ Н/м и движущегося вдоль оси Ox. Начальную координату и скорость выберем как $x_0 = 3$ м и $v_0 = 2$ м/с. Систему можно описать уравнением *гармонического осциллятора* [1, с. 398]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{4}$$

Перепишем уравнение (4) как систему двух уравнений вида (3), одно из которых соответствует координате груза, а другое – его скорости:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n, \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t(-\omega^2)x_n. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения системы (5) называются *разностными*. Такую систему можно записать в матричной форме: $u_{n+1} = Au_n$. Численная стабильность напрямую зависит от собственных значений матрицы A, используемой для перехода от шага n к шагу $n+1$. Покажем, что явный метод Эйлера не дает стабильного результата при интегрировании уравнения (4), то есть при стремлении n к бесконечности.

Теорема [2, с. 235]. *Разностное уравнение $u_{n+1} = Au_n$ устойчиво и $u_n \to 0$, если $|\lambda_i| < 1$ для всех собственных значений, нейтрально устойчиво и вектор u_n ограничен при всех $|\lambda_i| \leq 1$ и неустойчиво (u_n неограничен), если хотя бы одно собственное значение матрицы A удовлетворяет условию $|\lambda_i| > 1$.*

Применим теорему для системы (5) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -\Delta t\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где Δt – величина шага; ω^2 – квадрат циклической частоты пружины, вычисляемый как k/m. Для нахождения собственных значений матрицы A, воспользуемся ее *характеристическим уравнением* [2, с. 217]:

$$det(A - \lambda E) = 0, \tag{7}$$

где E – единичная матрица; λ – собственное значение A. Тогда *характеристический многочлен* матрицы A имеет вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + (\Delta t\omega)^2. \tag{8}$$

Найдя корни многочлена (8), получим собственные значения $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\Delta t\omega$. Их модули совпадают и строго больше единицы $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{1 + (\Delta t\omega)^2} > 1$, а, значит, уравнение (6) неустойчиво.

Практика показывает, что для многих физических систем явный метод Эйлера неустойчив. Стабильной альтернативой выступает симплектический метод Эйлера. Достаточно лишь поменять порядок интегрирования: скорость на следующем шаге должна быть вычислена до координаты. Тогда энергия рассматриваемой системы будет колебаться около ожидаемого значения, а не экспоненциально возрастать (*рис. 1*).

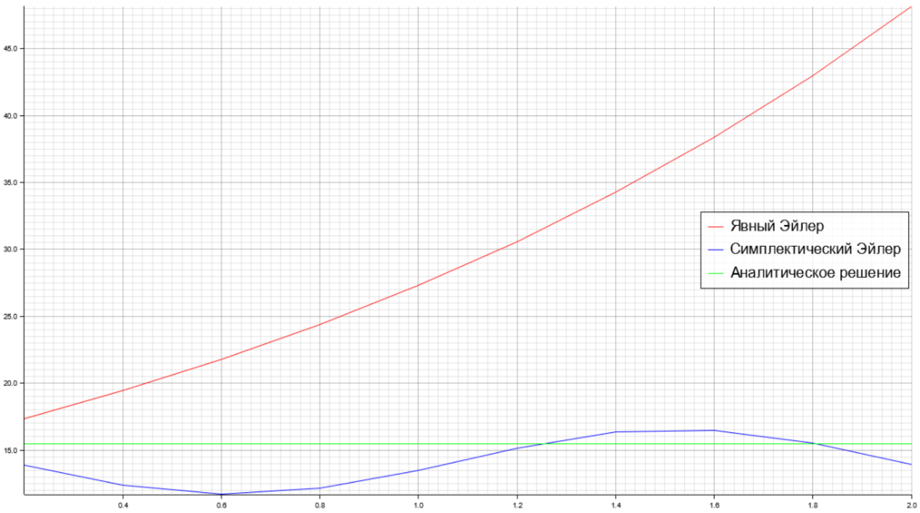

Рисунок 1 – Зависимость полной энергии системы E от времени t на участке 0-2 секунды с шагом $\Delta t = 0.2$с, $n = 10$

Рассмотрим наиболее точный метод – Рунге-Кутта четвертого порядка. Его точность обусловлена вычислением на каждом шаге четырех коэффициентов наклона в разных точках отрезка $[t_n; t_{n+1}]$, тогда как метод Эйлера вычисляет всего один коэффициент наклона. Формулируется метод Рунге-Кутта точно так же, как и метод Эйлера, однако вместо формулы (3) имеет место [3] следующее равенство:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{9}$$

где $k_1 = f(t_n, y_n)$; $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 \frac{h}{2})$; $k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2 \frac{h}{2})$; $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$. Полученные нами графики (*рис. 2*) демонстрируют результат использования численных интеграторов, рассмотренных в статье:

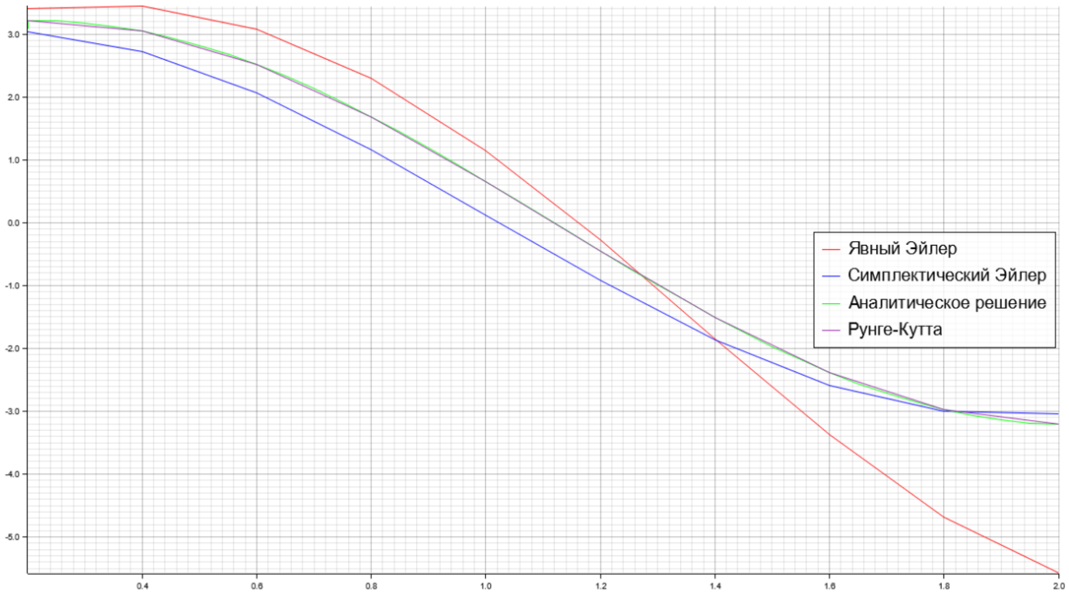

Рисунок 2 – Зависимость координаты груза x от времени t на участке 0-2 секунды с шагом $\Delta t = 0.2$с, $n = 10$

Явный метод Эйлера не дает желаемого решения и постепенно расходится, однако его симплектическая разновидность показывает хорошую точность с малыми затратами на вычисления. Метод Рунге-Кутта является несомненным лидером по точности с большими затратами на вычисления. При выборе интегратора необходимо искать баланс между вычислительной стоимостью и точностью алгоритма. Эти требования обусловлены сложностью игровых сцен, на которых могут располагаться сотни объектов, и малой величиной шага – она соответствует частоте обновления экрана (обычно 60-144 Гц).

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют эффективность написанной нами программной реализации симплектического метода Эйлера и метода Рунге-Кутта на языке программирования *Rust (2024 edition)*. Для оценки эффективности (*бенчмарков*) была использована библиотека *criterion.* Голубой линией на графиках обозначено среднее время выполнения итерации алгоритма. Закрашенная область соответствует плотности вероятности того, что одна итерация займет определенное время.

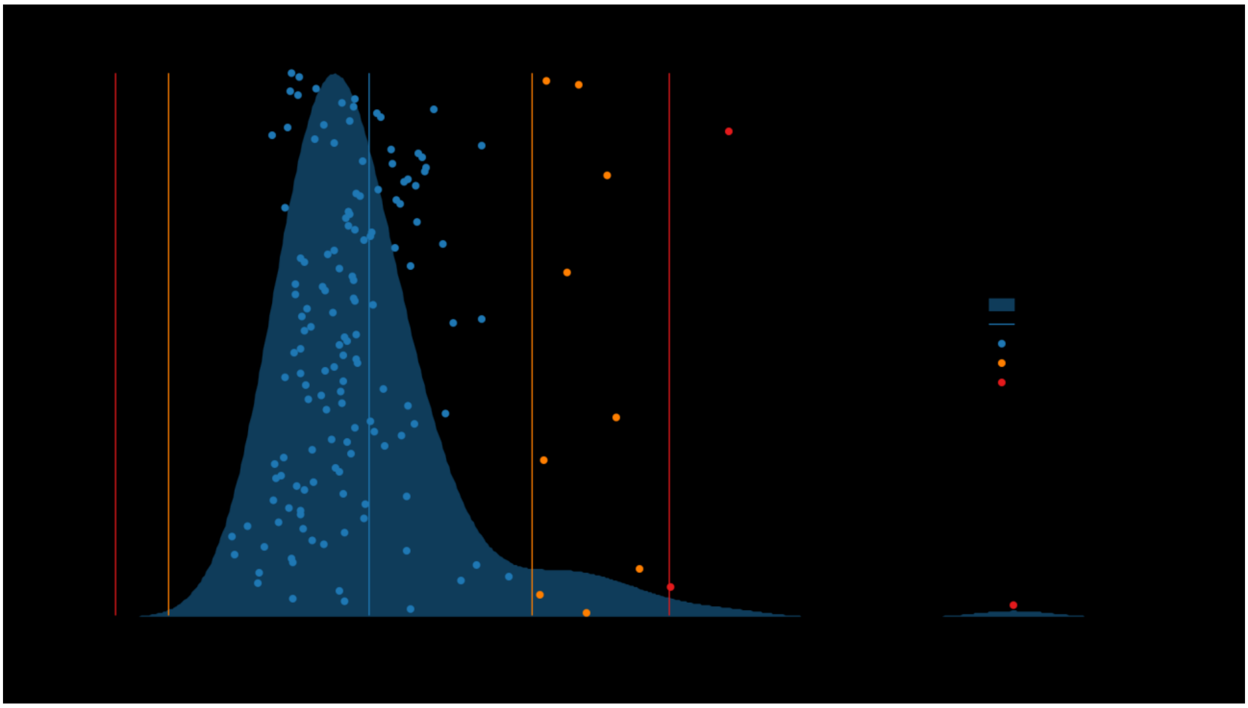

Рисунок 3 – Результаты бенчмарка для метода Рунге-Кутта

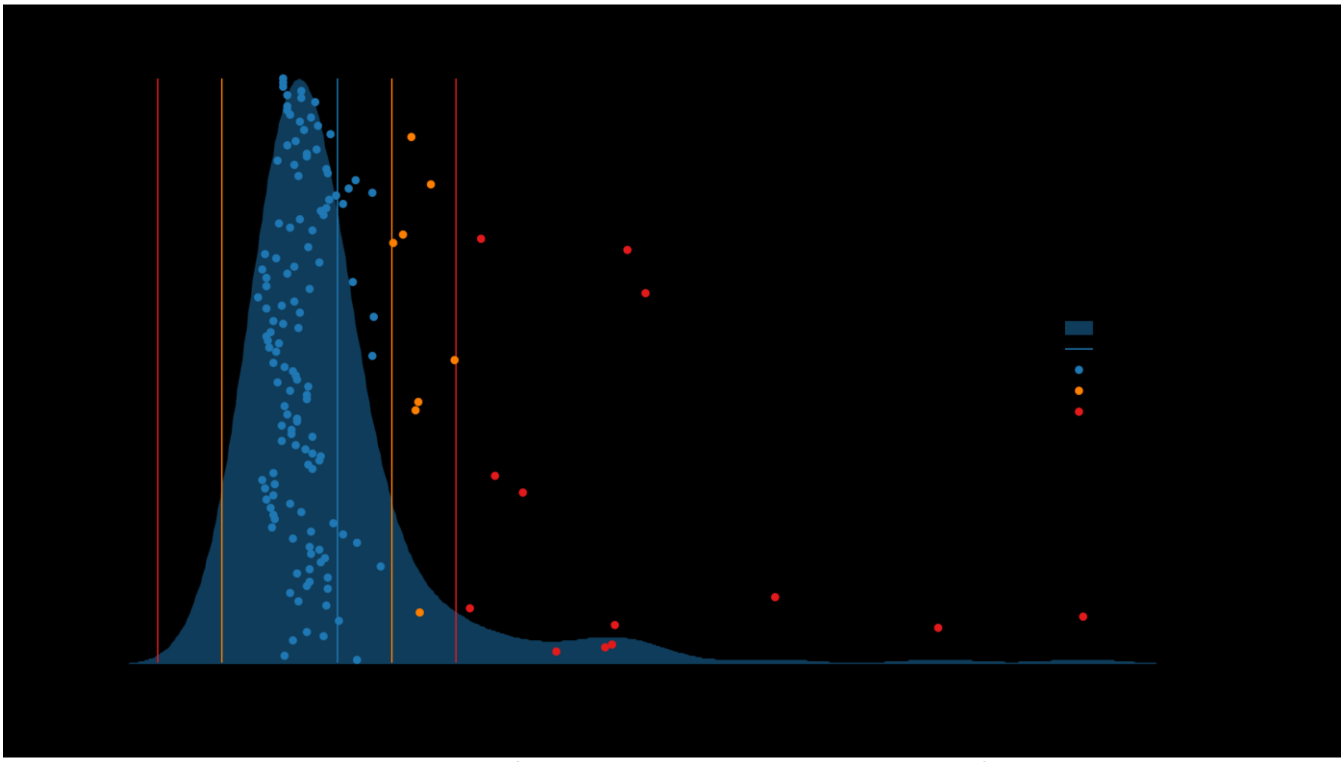

Рисунок 4 – Результаты бенчмарка для симплектического метода Эйлера

Список использованных источников:

1. Джанколи Д. Физика: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. // Мир, 1989. – 656с.

2. Линейная алгебра и ее применения / Стренг Г. // Книга по Требованию, 2024. – 460с.

3. Князева Л.П. Численные методы. Лабораторные работы по высшей математике для студентов всех специальностей БГУИР. В 2-х частях. // БГУИР, 1998. – 36с.

UDC 517.581:004.928

NUMERICAL STABILITY OF INTEGRATION METHODS IN COMPUTER GAMES

Vizgin A.P., Finevich A.V., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Primicheva Z.N. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. This paper examines the numerical stability of various integration methods used to solve equations of motion in physical simulations of computer games. The Euler and Runge-Kutta methods are analyzed using the example of modeling the dynamics of rigid bodies under the action of external forces. The accuracy and stability of the methods are compared, and graphs of the system behavior are presented.

Keywords. Differential equations, numerical integration methods, Euler's method, Runge-Kutta method, algorithm stability, physical simulation, computer games.