

УДК 517.9:595.796

МАГНИТОПОДОБНАЯ МОДЕЛЬ ХЕМОТАКСИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ У МУРАВЬЁВ

Волколовский М. Д.; Мацур И. Н., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Цегельник В.В. – д-р физ.-мат. наук, профессор

Аннотация. Изучена физическая модель навигации муравьёв по феромонному следу. Проведены исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных для описания движения муравья в рамках модели инерционного спина (ISM). Для нелинейного уравнения изучен тип подвижных особых точек и сделаны соответствующие выводы о характере описываемого ими движения.

Ключевые слова: хемотаксис, муравьи, феромонный след, дифференциальные уравнения, стационарные и подвижные точки, устойчивость решений, колебания скорости, корреляционная функция, стохастический осциллятор.

Хемотаксис – способность организмов ориентироваться в пространстве по химическим градиентам – широко распространён в живой природе. Муравьи используют феромонные метки для прокладки маршрутов. При движении вдоль узкого следа они совершают характерные колебания из стороны в сторону. Вероятно, это связано с билатеральным сканированием среды. Цель работы – проанализировать физическую модель, связывающую эти колебания с параметрами движения.

В публикации [1] хемотаксис интерпретируется как эффективное «магнитное» поле, действующее на ориентацию скорости. Формализация движения в виде осциллятора основывается на положениях модели ISM (инерционного спина). В ней состояние особи задаётся вектором скорости \vec{v} (с постоянным модулем v_0) и спином \vec{s} , который генерирует поворот вектора скорости [1]. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{1}{\chi}\right)(\vec{s} \times \vec{v}), \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} \times \left(-\frac{\partial H}{\partial \vec{v}}\right) - \left(\frac{\eta}{\chi}\right)\vec{s} + \vec{\xi}. \quad (1)$$

Здесь \vec{s} – спин (количественная мера поворота вектора скорости, аналог углового момента), χ – инерция поворота, η – коэффициент диссипации спина, $\vec{\xi}$ – белый шум. Функция $H(\vec{v}, \nabla c)$ – ориентационный потенциал, определяющий предпочтительные направления скорости относительно градиента концентрации феромона ∇c [1].

Для описания хемотаксиса вводится гамильтониан, сочетающий ферромагнитное и DM-подобное взаимодействия. В приближении прямолинейного следа, при доминировании DM-члена и движении в плоскости xy , система (1) преобразуется к уравнениям для продольной и поперечной компонент скорости, а также для z -компоненты спина [1]:

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{1}{\chi}\right)sv_y, \quad (2)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{1}{\chi}\right)sv_x, \quad (3)$$

$$\frac{ds}{dt} = -Dp(y)v_y - \left(\frac{\eta}{\chi}\right)s + \xi. \quad (4)$$

D – константа DM-взаимодействия, $p(y)$ – линейный профиль градиента концентрации поперёк следа. Из системы (2) – (4) после умножения уравнения (2) на v_x , а уравнения (3) на v_y следует, что

$$(v_x)^2 + (v_y)^2 = (v_0)^2. \quad (5)$$

Где v_0 – постоянная величина. Соотношение (5) есть первый интеграл системы (2) – (4). Из него следует, тот факт, что v_0 – есть постоянная скорость муравья. Условию (5) удовлетворяют величины:

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta. \quad (6)$$

v_x и v_y – составляющие вектора скорости муравья.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{s}{\chi}. \quad (7)$$

Подставляя выражение s через $\frac{d\theta}{dt}$ из (7) в (4), получаем уравнение для $\theta(t)$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\eta}{\chi}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{D p v_0}{\chi} \sin \theta = \xi^*. \quad (8)$$

После линеаризации (2)–(4) для малых отклонений выводится уравнение затухающего гармонического осциллятора, решение которого даёт корреляционную функцию поперечной скорости $C_{vy}(t) \propto e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t)$, что согласуется с экспериментом.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\eta}{\chi}\right)\dot{\theta} + \frac{D p v_0}{\chi} \theta = \xi^*. \quad (9)$$

Уравнение в данном виде не имеет детерминированного решения, так как параметр шума ξ^* имеет случайную природу. Если отбросить этот параметр для анализа, получим однородное дифференциальное уравнение, имеющее решение затухающего гармонического осциллятора.

Характеристическое уравнение имеет вид [3]:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2 = 0.$$

Которое в общем виде имеет корни:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{D p v_0}{\chi} - \frac{\eta^2}{4\chi^2}}.$$

Колебания совершаются в случае, когда подкоренное выражение меньше нуля. Тогда корни принимают комплексный вид.

Так как линейное ОДУ имеет решение в виде экспоненты [3], то решениями будут:

$$\theta(t) = e^{(-\gamma - i\omega_0)t}, \quad \theta(t) = e^{(-\gamma + i\omega_0)t}.$$

Поскольку уравнение второго порядка, общее решение – это их линейная комбинация, что по формуле Эйлера преобразуется в:

$$\theta_{h(t)} = R e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Данное решение представляет собой решение затухающего гармонического осциллятора. Диссипация системы приводит её к постепенному уменьшению отклонений от следа, однако именно фактор наличия шума ξ^* в уравнении (9) привносит в неё новые отклонения. Следовательно, с

параметром шума движение муравья представляет собой стационарный случайный процесс, решение которого выражается при фиксированной реализации шума с помощью функции Грина:

$$\theta(t) = \theta_{h(t)} + \int_0^t g(t, \tau) \xi^*(\tau) d\tau.$$

Так как само уравнение (8) нелинейно и не может иметь решения в общем виде [2], необходимо производить линеаризацию синуса или пользоваться для получения каких-то результатов алгебраическими заменами.

Используя те же обозначения, перепишем уравнение в виде:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega^2 \sin\theta = \xi^*. \quad (10)$$

$$\gamma = \frac{\eta}{2\chi}, \quad \Omega^2 = \frac{D p v_0}{\chi}.$$

В отличие от (9), нелинейность теперь содержится в самом восстанавливающем члене $\sin \theta$. Поэтому принцип суперпозиции уже не работает, а точное общее решение в элементарных функциях, вообще говоря, отсутствует. В частном случае $\gamma = 0$ и $\xi^* = 0$ уравнение переходит в уравнение математического маятника, решение которого выражается через эллиптические функции, а не через обычный синус.

Наиболее естественный способ линеаризации (10) – разложение синуса с помощью ряда Тейлора:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + o(\theta^5), \theta \rightarrow 0.$$

Если $|\theta| \ll 1$ рад, то в нулевом приближении можно оставить только первый член разложения и получить

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega^2\theta = \xi^*.$$

Что и есть способ получения уравнения (9), анализ которого уже проводился. Если оставить следующий член разложения, то получится более точная слабонелинейная модель

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega^2\theta - \frac{\Omega^2}{6}\theta^3 = \xi^*. \quad (11)$$

Это уже уравнение осциллятора Дуффинга с мягкой характеристикой. Его смысл состоит в том, что колебания остаются близкими к синусоидальным, но их частота начинает зависеть от амплитуды. При $\xi^* = 0$ и слабом затухании (без диссипативного члена)

Анализ уравнения (11) методом малого параметра показывает, что нелинейность приводит к зависимости частоты колебаний от их размаха. Итоговое выражение для частоты принимает вид:

$$\omega(A) \approx \Omega \left(1 - \frac{A^2}{16} \right).$$

Следовательно, при больших отклонениях колебания уже не являются строго гармоническими: период немного увеличивается, а сама траектория отклоняется от чистой синусоиды.

Самый общий способ – алгебраическая замена:

$$u = e^{i\theta}. \quad (12)$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\ddot{u} - \frac{\dot{u}^2}{u} + 2\gamma\dot{u} + \frac{\Omega^2}{2}(u^2 - 1) = iu\xi^*. \quad (13)$$

Эта замена полезна тем, что переводит тригонометрическую нелинейность в алгебраическую форму. Однако она не линеаризует задачу полностью, так как появляется новый нелинейный член $(u^2)/u$. Поэтому замена (12) удобна не для получения точного общего решения, а для анализа равновесий, локальных приближений и возможных особых точек [5, 6].

Исследование уравнения (13) в комплексной плоскости времени t показывает наличие подвижных особых точек. Переходя обратно к переменной θ , получаем:

$$\theta \sim -i \ln\left(-\frac{4}{\Omega^2}\right) + 2i \ln(t - t_0).$$

Следовательно, в переменной θ возникает логарифмическая ветвящаяся точка. При обходе вокруг t_0 в комплексной плоскости значение $\ln(t - t_0)$ меняется на $2\pi i$, а значит и само решение переходит на другую ветвь [4]. Поэтому говорят, что решение как аналитическая функция является многозначным. Точка t_0 называется подвижной, потому что при изменении начальных условий она смещается.

Следует отметить, что общее решение уравнения (9) также, согласно [2], содержит многозначные подвижные особые точки. Корреляции же для нескольких детерминированных траекторий из уравнения (10) представлены на рисунке:

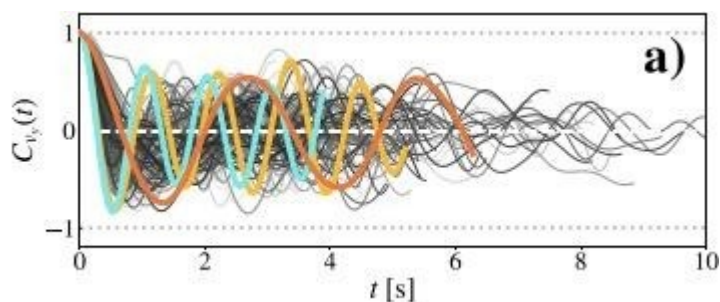


Рисунок 1 - Корреляции для нескольких типичных траекторий.

Физическая модель хемотаксиса на базе формализма ISM объясняет возникновение поперечных колебаний муравья при движении вдоль следа. Установлено, что соответствующая система дифференциальных уравнений обладает первым интегралом (постоянство модуля скорости) и сводится к нелинейному уравнению второго порядка. Линеаризация модели описывает затухающие колебания, а учет нелинейности выявляет зависимость их частоты от амплитуды. Анализ стационарных точек подтвердил устойчивость движения при $\theta = 0$. Обнаружение подвижной логарифмической особой точки указывает на сложную аналитическую структуру решений при значительных отклонениях от траектории. Исследование позволило описать как локальные режимы движения, так и нелинейную динамику модели.

Список использованных источников:

1. A Magnetic-like Model for Chemotactic Navigation in Ants / Rosa Flaquer-Galmés, Daniel Campos, Javier Cristín // arXiv. – 2025. – 10 p.
2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ОНТИ, 1939. – 720 с.
3. ЛОДУ с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен | 54 | Константин Правдин | ИТМО [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=NyWd9_KdfSc
4. Лекция 9. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. Разложение в ряд по параметру нелинейности. Осциллятор с квадратичной нелинейностью [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://sgtnd.narod.ru/papers/Lect09.pdf>
5. Свойство Пенлеве в теории дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9909_118.pdf
6. Нелинейные дифференциальные уравнения со свойством Пенлеве [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/179120/1/29-33.pdf>

UDC 517.9:595.796

A MAGNETIC-LIKE MODEL FOR CHEMOTACTIC NAVIGATION IN ANTS

Volkolovsky M. D., Matsur I. N., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Tsegelnik V.V. – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Annotation. An abstract model of ant navigation using a pheromone trail is studied. Ordinary differential equations derived to describe ant motion within the inertial spin model (ISM) are analyzed. A type of moving singular points is obtained for the nonlinear equation, and corresponding conclusions are drawn regarding the nature of the motion they describe.

Keywords: Chemotaxis, ants, pheromone trail, differential equations, stationary and moving special points, stability of solutions, velocity oscillations, correlation function, stochastic oscillator.