УДК 519.8

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИГРОВЫХ ПРОЦЕССОВ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИГРОВЫХ СТРАТЕГИЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Ярцев А.А., студент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Рыкова О.В. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. В данной работе исследуется сходимость статистических оценок к теоретическим параметрам математического ожидания в азартных играх (европейская рулетка, крэпс, игровые автоматы). На основе метода Монте-Карло реализована программная модель, позволяющая верифицировать закон больших чисел для процессов с отрицательным математическим ожиданием. Проведен сравнительный анализ стратегий с фиксированной ставкой и прогрессивной системы Мартингейла. Показано, что в условиях ограниченного банкролла и лимитов системы, стратегии управления ставками не изменяют фундаментальный показатель «преимущества заведения» (House Edge), а лишь трансформируют распределение вероятностей исходов, увеличивая риск катастрофического убытка.

Ключевые слова. Метод Монте-Карло, закон больших чисел, математическое ожидание, стохастическое моделирование, преимущество заведения, риск банкротства.

Математическое моделирование процессов, характеризующихся наличием случайных факторов, является одним из ключевых направлений развития теории вероятностей, истоки которой восходят к работам Блез Паскаль и Пьер Ферма, посвященным анализу игровых задач [1]. В современных условиях развития вычислительных технологий особое значение приобретает метод Монте-Карло, позволяющий осуществлять статистическое моделирование и получать оценки параметров сложных игровых систем с заданной степенью точности в случаях, когда аналитическое решение является затруднительным либо требует существенных упрощений.

Центральным понятием в анализе игровых систем является математическое ожидание выигрыша $M[X]$, которое в коммерческих азартных играх всегда смещено в пользу организатора. Данная величина, выраженная в процентах, получила название «House Edge» (преимущество заведения) [2]. Однако, несмотря на объективный характер данного свойства, в среде игроков сохраняется устойчивое заблуждение о возможности его преодоления посредством использования различных стратегий управления ставками, включая систему Мартингейла.

Система Мартингейла в своей классической форме представляет собой стратегию, основанную на удвоении ставки после каждого проигрыша, что теоретически гарантирует выигрыш начальной ставки при бесконечном банкролле и отсутствии верхнего лимита ставок [3]. Однако в реальных физических и экономических системах данные условия недостижимы. Это приводит к возникновению риска разорения игрока при достижении предела последовательных проигрышей.

Актуальность данной работы заключается в экспериментальной проверке закона больших чисел [4], согласно которому среднее значение выборки случайных величин при достаточно большом количестве испытаний n стремится к их математическому ожиданию:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - M[X]\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где n – количество испытаний, X_i – результат каждого отдельного испытания, $M[X]$ – теоретическое математическое ожидание, ε – сколь угодно малое положительное число, P – вероятность.

Целью работы является разработка программного комплекса для симуляции различных механик азартных игр и доказательство того, что статистические результаты на длительной дистанции неизбежно сходятся к теоретически предсказанному отрицательному значению, независимо от применяемых игровых стратегий.

Теоретические модели исследуемых игр. В данном разделе рассматриваются математические модели трёх типов игровых механик, реализованных в программном комплексе. Для каждой модели определяется вероятностное пространство и рассчитывается теоретическое значение математического ожидания выигрыша $M[X]$ на основе которого вычисляется показатель преимущества заведения (House Edge, HE) по формуле:

$$HE = -M[X] \cdot 100\%.$$

1) Модель европейской рулетки

Европейская рулетка представляет собой классическую стохастическую систему с дискретным распределением вероятностей на множестве исходов $\Omega = \{0,1,2,\ldots,36\}$. Наличие сектора «зеро» (0) создает асимметрию, обеспечивающую преимущество организатора [5].

При ставке на равные шансы (например, на красный цвет) вероятность выигрыша $P(W)$ и проигрыша $P(L)$ составляют:

– $P(W) = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$;

– $P(L) = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$.

Математическое ожидание при единичной ставке:

$$M[X] = 1 \cdot P(W) + (-1) \cdot P(L) = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0{,}0270.$$

Таким образом, теоретический HE для данной модели составляет 2,70%.

2) Модель игры в кости (Craps: Pass Line)

Ставка Pass Line в Craps является наиболее математически сбалансированной. Вероятностное пространство исходов при броске двух идеальных шестигранных костей состоит из 36 комбинаций. Вероятность выпадения суммы i обозначается как $P(S = i)$.

Процесс игры делится на два этапа:

1) Стадия «Come Out Roll» (Первый бросок)

На этом этапе возможны три сценария:

– **natural (Мгновенный выигрыш)**: сумма 7 или 11, $P(WIN_{CO}) = P(7) + P(11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0{,}2222$;

– **craps (Мгновенный проигрыш):** сумма 2, 3 или 12, $P(LOSS_{CO}) = P(2) + P(3) + P(12) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111$;

– **point (Установка «Точки»):** любая другая сумма (4, 5, 6, 8, 9, 10). $P(Point = i)$ – вероятность того, что игра перейдет во вторую стадию с установленным числом i.

2) Стадия «Point Phase» (Игра на выбывание)

Если установлена точка i, игрок продолжает бросать кости. Раунд длится до тех пор, пока не выпадет либо само число i (**выигрыш**), либо число 7 (**проигрыш**). Все остальные суммы игнорируются.

Вероятность выиграть, имея точку i, рассчитывается по формуле условной вероятности:

$$P(Win|Point = i) = \frac{P(i)}{P(i) + P(7)}.$$

3) Расчет полной вероятности выигрыша

Полная вероятность выигрыша $P(W)$ определяется как сумма вероятности мгновенного выигрыша и суммы вероятностей выигрыша на этапе «Point» для каждого возможного значения точки:

$$P(W) = P(WIN_{CO}) + \sum_{i \in \{4,5,6,8,9,10\}} \big(P(Point = i) \cdot P(Win|Point = i)\big).$$

Подставим значения в таблицу:

Точка (i)	$P(Point = i)$	$P(Win\|Point = i)$	Произведение
4 или 10	$2 \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{3}{3+6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$
5 или 9	$2 \cdot \frac{4}{36} = \frac{2}{9}$	$\frac{4}{4+6} = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{45}$
6 или 8	$2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$	$\frac{5}{18} \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{198}$

Итоговая вероятность выигрыша:

$$P(W) = \frac{2}{9} + \left(\frac{1}{18} + \frac{4}{45} + \frac{25}{396}\right) \approx 0{,}2222 + 0{,}2707 = 0{,}49(29).$$

4) House Edge (HE)

Математическое ожидание выигрыша при ставке в 1 условную денежную единицу (выплата 1 к 1):

$$M[X] = \big(1 \cdot P(W)\big) + \Big(-1 \cdot \big(1 - P(W)\big)\Big) = 0{,}4929 - 0{,}5070 = -0{,}0142.$$

Преимущество заведения (House Edge):

$$HE = -M[X] \cdot 100\% = 1{,}42\%.$$

В различных источниках значение варьируется от 1.41% до 1.42% из-за округления периодических дробей, в программной реализации используется 1.41%.

3) Модель сбалансированного игрового автомата (Slot Machine)

В отличие от классических настольных игр, где вероятность диктуется физическими свойствами объектов (37 секторов рулетки или 36 комбинаций костей), параметры игрового автомата в данной работе определяются программно-заданным распределением. Реализованная модель имитирует трехбарабанный слот с набором из $N = 3$ уникальных символов на каждом барабане.

Если предположить, что выпадение каждого символа равновероятно, то общее число комбинаций составляет $N^3 = 3^3 = 27$. Количество выигрышных комбинаций (джекпотов), где все три символа совпадают, равно $N = 3$ (в нашем случае, [0,0,0], [1,1,1], [2,2,2]).

Следовательно, базовая вероятность джекпота P_{base} составляет:

$$P_{base} = \frac{N}{N^3} = \frac{1}{N^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111 \text{ (или } 11{,}11\%).$$

Для обеспечения фиксированной доходности казино (в программной реализации $HE = 5\%$) вводится механизм «фильтрации» выигрышей. Реальная вероятность джекпота P_{real} рассчитывается как доля от базовой, исключающая математическое ожидание прибыли заведения:

$$P_{real} = P_{base} \cdot (1 - HE) = 0{,}1111 \cdot 0{,}95 \approx 0{,}105(5) \approx 10{,}56\%.$$

Эта разница в $0{,}55\%$ ($11{,}11\% - 10{,}56\%$) представляет собой так называемую «зону принудительного проигрыша» – ситуации, когда символы на барабанах совпали визуально, но программный алгоритм не засчитывает выигрыш в пользу удержания маржи заведения [5].

Чтобы игра оставалась математически сбалансированной при заданном HE, множитель выплаты M за джекпот должен соответствовать уравнению:

$$M[X] = (P_{real} \cdot M) + ((1 - P_{real}) \cdot (-1)) = -HE$$

Подставим значения для нахождения M:

$$(0{,}1056 \cdot M) - (1 - 0{,}1056) = -0{,}05;$$
$$0{,}1056 \cdot M - 0{,}8944 = -0{,}05;$$
$$0{,}1056 \cdot M = 0{,}8444;$$
$$M = \frac{0{,}8444}{0{,}1056} \approx 7{,}996.$$

В программной реализации значение округляется до целого числа 8x. Таким образом, при ставке в 1 условную денежную единицу, игрок получает 8 условных денежных единиц в случае успеха, что при вероятности $10{,}56\%$ в точности обеспечивает преимущество заведения в 5%.

Описанная модель характеризуется высокой дисперсией. В отличие от рулетки, где игрок проигрывает небольшие суммы часто, в слотах игрок теряет ставку в $89{,}44\%$ случаев, ожидая редкого события с высоким коэффициентом выплаты. Это создает иллюзию «близости выигрыша», что является важным психологическим аспектом азартных игр.

Метод Монте-Карло. Для верификации теоретических моделей, описанных выше, в работе использован метод Монте-Карло. Выбор данного метода обусловлен необходимостью анализа поведения стохастических систем на большой дистанции, где аналитический расчет дисперсии и риска разорения становится громоздким [4].

В программном комплексе реализован алгоритм, выполняющий $N = 10\,000$ (в программной реализации можно задать любое число N) независимых итераций (спинов/раундов) для каждой игры. Метод позволяет:

1) Визуализировать сходимость среднего выигрыша к математическому ожиданию (закон больших чисел).

2) Оценить реальное распределение прибыли и убытков в условиях высокой дисперсии (особенно для игровых автоматов).

3) Статистически подтвердить, что «House Edge» проявляется не как мгновенный отъем средств, а как детерминированная тенденция на длительном интервале.

Анализ стратегии Мартингейла. Особое внимание в работе уделено исследованию прогрессивной системы ставок – стратегии Мартингейла. Алгоритм стратегии формализован следующим образом:

– Начальная ставка b_0;

– В случае проигрыша на шаге n, следующая ставка $b_{n+1} = b_n \cdot 2$;

– В случае выигрыша возврат к b_0.

Математический анализ в рамках симуляции подтверждает «стратегию Мартингейла» [3]: несмотря на то, что вероятность выигрыша в отдельной серии высока, стратегия не изменяет математическое ожидание игры ($M[X] < 0$). В условиях симуляции были введены реалистичные ограничения, которые есть на практике в большинстве случаев:

– Лимит банкролла – конечная сумма средств игрока;

– Лимит стола (Max Bet) – ограничение максимальной ставки.

Результат программной реализации. В данном разделе представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного с использованием разработанного программного обеспечения. Тестирование проводилось на выборке из 10 000 итераций для каждого игрового процесса.

Анализ статистических показателей европейской рулетки и игры в кости. На рисунках 1-2 представлены примеры одной симуляции для европейской рулетки и игры в кости.

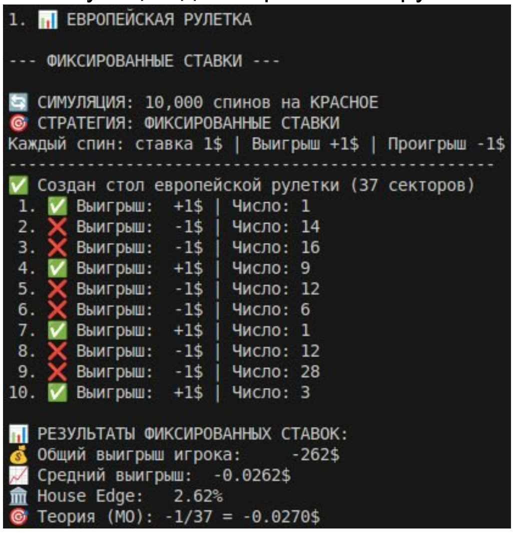

Рисунок 1 – Вывод программы для европейской рулетки (фиксированные ставки)

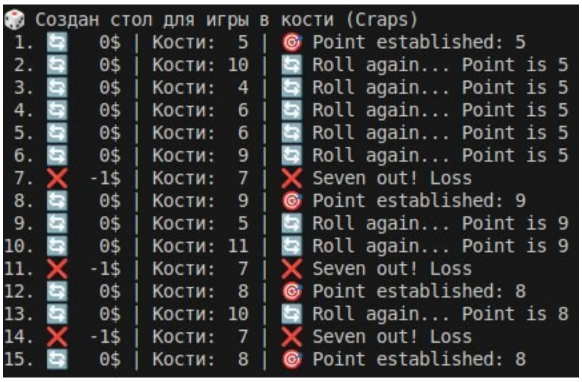

Рисунок 2 – Вывод программы для игры в кости

В ходе симуляции рулетки средний убыток на спин составил $-0{,}0262$ условных денежных единиц, что соответствует преимуществу заведения $HE = 2{,}62\%$. Полученное значение демонстрирует высокую степень сходимости с теоретическим параметром ($2{,}70\%$), относительная погрешность составила менее 3%. В игре в кости (Craps) итоговый результат ($HE = 0{,}85\%$, см. рис. 4), также подтверждает отрицательное математическое ожидание, заложенное в алгоритм, хоть и с относительной погрешностью в $39{,}72\%$ для данного тестового примера.

Верификация модели игрового автомата. Моделирование слотов (см. рис. 3) подтверждает корректность реализованного алгоритма «фильтрации» джекпотов.

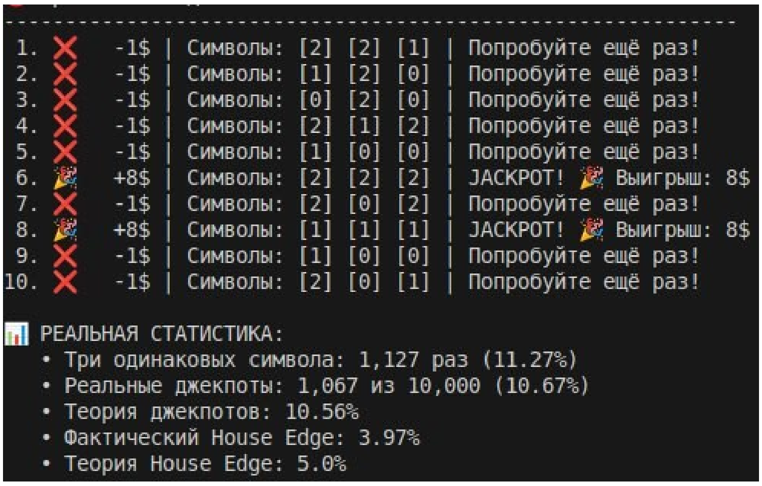

Рисунок 3 – Вывод программы для игрового автомата

Несмотря на то, что комбинаторно три одинаковых символа выпали в 11.27% случаев ($P_{base} \approx 11{,}11\%$), реальное количество выплаченных джекпотов составило 10.67%, что соответствует заданному целевому значению $P_{real} \approx 10{,}56\%$. Это доказывает эффективность программного удержания House Edge даже в высокодисперсионных моделях.

Сравнительный анализ стратегий и закон больших чисел. Для оценки эффективности систем управления ставками была проведена сравнительная симуляция (см. рис. 4).

```
============================================================
📈 СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА
============================================================
Игра/Стратегия             | House Edge   | Результат
------------------------------------------------------------
Рулетка (фикс)             | 2.62      % |          -262$
Рулетка (Мартингейл)       | 4.96      % |          -496$
Кости (Craps)              | 0.85      % |           -85$
Игровой автомат            | 3.97      % |          -397$

🎯 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ HOUSE EDGE:
   • Рулетка европейская: 2.70%
   • Кости (Pass Line):   1.41%
   • Игровой автомат:     5.00%
```

Рисунок 4 – Вывод программы для сравнительной статистики

Результаты показывают, что использование стратегии Мартингейла привело к более существенному итоговому убытку (в 496 условных денежных единиц) по сравнению с убытком с фиксированными ставками (в 262 условных денежных единиц). Это объясняется тем, что прогрессивное увеличение ставок при отрицательном математическом ожидании лишь ускоряет финансовое истощение банкролла на длинной дистанции.

Доказательством статистической достоверности полученных данных является таблица сходимости (см. рис. 5).

```
==================================================
📈 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ
Как средний выигрыш СХОДИТСЯ к -0.027$
==================================================
Спинов   | Средний $  | Отклонение
----------------------------------
100      | 0.0800     | 10.70     % 📈
500      | 0.0000     | 2.70      % ➡
1000     | -0.0160    | 1.10      % ➡
5000     | -0.0196    | 0.74      % ➡
10000    | -0.0262    | 0.08      % 📉
```

Рисунок 5 – Вывод программы для закона больших чисел

Как видно из таблицы на рисунке 5, на малых выборках (n = 100) наблюдаются значительные амплитуды отклонений (10.7%), однако при увеличении объема выборки до n = 10 000 экспериментальное значение демонстрирует сходимость к теоретическому показателю (отклонение сокращается до 0.08%). Данный результат является прямой эмпирической валидацией закона больших чисел.

Заключение. В ходе выполнения данной работы был разработан программа на языке программирования Python, позволивший провести стохастическое моделирование трех различных типов игровых механик: европейской рулетки, игры в кости и сбалансированного игрового автомата. Применение метода Монте-Карло с объемом выборки в 10 000 итераций обеспечило получение достоверных данных, которые подтверждают совпадение результатов опыта с теоретическими расчетами математического ожидания

Экспериментально зафиксированные показатели «преимущества заведения» (House Edge) для рулетки (2,62%), игры в кости (0,85%) и игрового автомата (3,97%) подтверждают корректность реализованных алгоритмов. Анализ динамики результатов наглядно продемонстрировал действие закона больших чисел: при увеличении числа испытаний относительное отклонение среднего выигрыша от теории снизилось с 10,7% до 0,08%. Это доказывает, что на линной дистанции любые случайные отклонения исчезают, и банкролл игрока неизбежно уходит в минус.

Сравнительный анализ систем управления ставками выявил, что прогрессивные стратегии, включая систему Мартингейла, не способны изменить фундаментальное математическое ожидание игры. В условиях ограниченного банкролла и лимитов ставок такие системы лишь концентрируют риск, превращая постепенное сокращение средств в вероятность мгновенного и полного разорения. Подтверждено, что ни одна стратегия ставок не может преодолеть заложенное в правила преимущество организатора.

Таким образом, результаты проведённой работы позволяют заранее предсказать неизбежность потери денег игроком. Ставки в играх, где шансы изначально на стороне игорного заведения, лишены смысла с точки зрения теории вероятностей, математической статистики и логики. Казино работает как чётко настроенная детерминированная система с заранее определённым преимуществом самого заведения в любой игровой модели, поэтому участие в подобных играх ведёт к гарантированным убыткам, особенно в долгосрочной перспективе.

Список использованных источников:

1. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах / В. Феллер ; пер. с англ. Ю. В. Прохорова. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://lib.ysu.am/open_books/43743_1.pdf. – Дата доступа: 05.04.2026.

2. Thorp, E. O. The Mathematics of Gambling / E. O. Thorp. – New York : Lyle Stuart, 1984. – 161 p.

3. Ширяев, А. Н. Вероятность – 1 [Электронный ресурс] / А. Н. Ширяев. – М. : МЦНМО, 2007. – 552 с. – Режим доступа: http://www.booksshare.net/books/physics/shiryaev-an/1957/files/veroyatnost1957.pdf. – Дата доступа: 05.04.2026.

4. Соболь, И. М. Метод Монте-Карло [Электронный ресурс] / И. М. Соболь. – М. : Наука, 1973. – 312 с. – Режим доступа: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Sobol1973ru.pdf. – Дата доступа: 05.04.2026.

5. Ethier, S. N. The Doctrine of Chances: Probabilistic Aspects of Gambling / S. N. Ethier. – Berlin : Springer Science & Business Media, 2010. – 816 p.

UDC 519.8

STATISTICAL MODELING OF GAME PROCESSES AND EVALUATION OF GAMING STRATEGIES' EFFICIENCY BY THE MONTE CARLO METHOD

Yartsev A.A., student

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Rykova O. V. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. This paper examines the convergence of statistical estimates to theoretical parameters of mathematical expectation in gambling games (European roulette, craps, slot machines). Based on the Monte Carlo method, a software model has been implemented that allows for the verification of the law of large numbers for processes with negative mathematical expectation. A comparative analysis of fixed-bet strategies and the Martingale progressive system is conducted. It has been shown that under limited bankrolls and system limits, betting strategies do not change the fundamental house edge, but merely transform the probability distribution of outcomes, increasing the risk of catastrophic losses.

Keywords: Monte Carlo simulation, law of large numbers, mathematical expectation, stochastic modeling, house edge, risk of bankruptcy.