

УДК 514.116.2:582.639.11

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦВЕТНИК «РОЗЫ ГВИДО ГРАНДИ»

Задонцева С.И., Насевич Д.Р., студенты

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь*

Лобанок Л.В. – старший преподаватель

Аннотация. В статье рассматривается так называемая «роза Гвидо Гранди» как пример парадокса бесконечного суммирования: последовательность частичных сумм чередуется и при этом в ряде формальных процедур допускает конечное значение. Показано, как работа Гранди (начало XVIII века) ввела в обсуждение нетривиальные свойства бесконечных процессов, а современные подходы (Цезаро и Абель) дают согласованную интерпретацию суммы. Обсуждаются математический смысл результата, условия применимости и философские следствия для понимания бесконечности.

Ключевые слова. Гвидо Гранди; «роза Гранди»; расходящийся ряд; суммирование Цезаро; суммирование Абеля; бесконечные процессы.

Математическая культура раннего Нового времени постепенно научилась мыслить бесконечными объектами так, чтобы они были не просто «воображаемыми», а управляемыми рассуждениями. В этом контексте «роза Гвидо Гранди» стала ярким символом того, что формальные операции с бесконечными рядами могут породить противоречивые на вид выводы, если не уточнить, что именно понимается под «суммой».

Речь идет о простейшем чередующемся выражении, которое внешне выглядит как элементарная алгебра: последовательные слагаемые равны 1, -1, 1, -1, и т.д. Но именно бесконечность процесса делает вопрос нетривиальным. Если ограничиться интуицией частичных вычислений, возникает конфликт: разные способы «сборки» ряда дают разные ответы. Такой конфликт и составляет ядро парадокса, который сегодня связывают с именем Гвидо Гранди. Биографические сведения о нем и его роли в развитии анализа и геометрии можно найти в справочных источниках [1]. Первичное математическое основание обсуждения содержится в его работе, изданной в 1703 году [2].

В дальнейшем «розу Гранди» рассматривают как учебный пример: она полезна для обучения аккуратности определения предельных величин, для понимания различий между сходимостью и «регуляризуемой» суммой и для демонстрации того, что разные методы суммирования могут быть совместимыми только при корректном выборе класса задач.

Гвидо Гранди (1671–1742) известен как математик, связывавший геометрические построения с идеями бесконечных процессов [1]. Его книга 1703 года посвящена геометрическим вопросам квадратуры окружности и гипербол, где используются рассуждения о бесконечных сериях и связанных с ними величинах [2]. В этом же круге идей формируется и знаменитая серия, позже получившая статус самостоятельного объекта анализа.

Почему столь простая последовательность стала заметной? Потому что она иллюстрирует важный момент: «сумма» как обозначение не равна сумме как физическому накоплению конечного количества шагов. Для конечного числа слагаемых понятие суммы однозначно, но для бесконечного ряда требуется дополнительная проверка: сходится ли последовательность частичных сумм и в каком смысле вообще можно присвоить числовое значение.

Нередко пересказывают «парадоксальную» часть так: частичные суммы чередуются между двумя значениями. Тогда наивный вывод «значит, сумма либо 0, либо 1» воспринимается как естественный. Однако при попытке перестроить группировку или применить другие формальные процедуры появляется другая «сумма». Эта проблема фиксируется в популярном описании истории ряда и в обзорах, посвященных «Grandi's series» и ее интерпретациям [3].

Итак, исторически «роза» родилась как следствие интереса к бесконечным конструкциям, но математически она стала экзаменом на строгость: что именно считать суммой и почему в одних контекстах ответ может быть корректно интерпретирован как 1/2, а в других — нет.

В классической постановке «роза Гранди» задается рядом

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (1)$$

где S — сумма знакопеременного бесконечного ряда, состоящего из чередующихся единиц и минус единиц.

получается последовательность чередующихся слагаемых $(+1, -1, +1, -1, \dots)$, а знакочередование делает поведение частичных сумм нестабильным и принципиально отличным от обычных сходящихся рядов.

Рассмотрим частичные суммы S_n как сумму первых n членов. Для четных и нечетных индексов они ведут себя по-разному:

$$S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1 \dots \quad (2)$$

где S_{2n} — частичная сумма для чётного числа членов ряда, принимающая значение 0; S_{2n+1} — частичная сумма для нечётного числа членов ряда, принимающая значение 1.

получается, что каждая пара соседних членов вносит нулевой вклад; однако после добавления «хвостового» нечетного члена итоговая частичная сумма скачком становится 1, поэтому последовательность частичных сумм не стремится к единственному предельному значению.

Отсюда видно: ряд не является сходящимся в обычном смысле. Если бы последовательность S_n имела предел, то он и был бы «суммой» ряда. Но она колеблется. Поэтому прямое утверждение «сумма ряда равна 0» или «сумма равна 1» зависит от того, какой поднабор частичных сумм вы берете: четные индексы дают 0, нечетные — 1. В этом и заключается парадоксальная сторона образа: один и тот же объект демонстрирует два разных предельных поведения.

Важно подчеркнуть, что противоречие возникает не из-за «мистики ряда», а из-за попытки автоматически отождествить разные понятия: «поведение частичных сумм» и «значение суммы» требуют согласованного определения.

В современных учебных изложениях это различие подчеркивается при обсуждении истории ряда и способов его «суммирования» в расширенном смысле [3].

Несмотря на расходимость в стандартном смысле, серия может получать значение в других процедурах суммирования, если эти процедуры согласованы с определенными аналитическими предельными операциями. Один из наиболее прозрачных методов — суммирование Абеля.

Для начала рассмотрим степенной ряд, зависящий от параметра x с условием $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, |x| < 1 \dots \quad (3)$$

где x — действительная переменная; $|x| < 1$ — область сходимости степенного ряда; левая часть представляет собой бесконечную сумму степеней x с чередующимися знаками, правая — её замкнутое выражение.

получается стандартная геометрическая серия, где чередование знаков учитывается множителем $(-1)^k$, а ограничение $|x| < 1$ гарантирует сходимость и позволяет корректно использовать формулу замкнутой суммы.

Теперь можно «снять параметр», устремив x к 1 слева:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \dots \quad (4)$$

где $x \rightarrow 1^-$ означает стремление переменной x к 1 слева; правая часть выражения определяет значение предела функции.

получается, что хотя исходный ряд при $x=1$ уже не сходится, предельное значение суммированного по Абелю семейства рядов существует и равно $1/2$; это и дает согласованную интерпретацию «суммы» в смысле Абеля.

Тем самым, процедура Абеля предлагает число, которое не равно любому из поделов последовательности частичных сумм (0 или 1), но возникает как результат более тонкой предельной операции в семействе сходящихся рядов.

В обзорах по суммированию «розы Гранди» подробно объясняется, что разные методы суммирования не обязаны совпадать с обычной суммой расходящегося ряда, но могут давать согласованные значения в рамках определенного класса методов [4].

Еще один классический подход — суммирование Цезаро. Идея проста: если частичные суммы колеблются, можно попытаться усреднить их и посмотреть, стремится ли среднее к пределу.

Пусть S_n — частичные суммы исходного ряда. Тогда рассмотрим усреднение первых $2n+1$ значений S_0, S_1, \dots, S_{2n} . В случае «розы Гранди» усреднение дает ровно $1/2$:

$$\frac{1}{2n+x} \sum_{m=0}^{2n} S_m = \frac{1}{2} \dots \quad (4)$$

где S_m — частичная сумма ряда; $2n+1$ — количество учитываемых членов при усреднении; левая часть выражения представляет собой среднее арифметическое первых $2n+1$ частичных сумм.

получается, что среди первых $2n+1$ частичных сумм ровно $n+1$ значений равно 1 и ровно n значений равно 0, поэтому среднее и равно $1/2$ независимо от n ; в пределе это устойчивое усреднение совпадает с числом, полученным по Абелю.

С точки зрения математической строгости здесь важна формулировка: мы не утверждаем, что ряд сходится, мы утверждаем, что определенное преобразование последовательности частичных сумм (усреднение) имеет предел.

Именно поэтому современные источники, говоря о «сумме Гранди» как $1/2$, обычно добавляют оговорку: это значение относится к выбранному методу суммирования, а не к стандартному понятию суммы сходящегося ряда [4].

Подробные данные расчетных параметров для различных значений коэффициента приведены в таблице 1.

В популярной форме «парадокс» объясняют так: поскольку частичные суммы на четных шагах равны 0, а на нечетных — 1, кажется, что «сумма» должна быть и той, и другой. Но в строгой математике это не парадокс, а индикатор того, что заданное выражение не удовлетворяет критерию сходимости.

Прояснение происходит, когда вы уточняете понятие «суммы»:

- В обычном смысле сумма расходящегося ряда не определена (или, более осторожно, не совпадает с числом, которое было бы предельным значением частичных сумм).
- В смысле Абеля вы строите семейство сходящихся рядов при $|x| < 1$ и берете аналитически корректный предел.
- В смысле Цезаро вы усредняете частичные суммы, убирая периодическое «дрожание».

Иными словами, «две суммы» — это не два разных закона природы, а две разные операции извлечения численного результата из последовательности, которая не сходится.

Исторические пересказы подчеркивают, что Гранди сталкивался с такими неоднозначностями при изучении бесконечных процессов [3]. А современная математика показывает, что строгая трактовка возможна именно благодаря уточнению определения.

Таблица 1 – Сводные данные зависимости морфологии розы Гранди от коэффициента k

№п/п	Значение коэффициента k	$k=qp$ (несократ.)	Условие по чётности (p,q)	Число лепестков N	Примечание
1	1	1/1	p нечётное, q нечётное	1	целое
2	2	2/1	p чётное	4	целое
3	3	3/1	p нечётное, q нечётное	3	целое
4	4	4/1	p чётное	8	целое
5	5	5/1	p нечётное, q нечётное	5	целое
6	6	6/1	p чётное	12	целое
7	7	7/1	p нечётное, q нечётное	7	целое
8	8	8/1	p чётное	16	целое
9	1/2	1/2	q чётное	2	дробное
10	1/3	1/3	p нечётное, q нечётное	1	дробное
11	2/3	2/3	p чётное	4	дробное
12	3/2	3/2	q чётное	6	дробное
13	1/4	1/4	q чётное	2	дробное

14	$3/4$	$3/4$	q чётное	6	дробное
15	$2/5$	$2/5$	p чётное	4	дробное
16	$4/5$	$4/5$	p чётное	8	дробное
17	$5/3$	$5/3$	p нечётное, q нечётное	5	дробное
18	$5/2$	$5/2$	q чётное	10	дробное
19	$7/6$	$7/6$	q чётное	14	дробное
20	$9/5$	$9/5$	p нечётное, q нечётное	9	дробно

Слово «роза» в названии закрепилось не только как дань традиции, но и как способ удержать интуицию: в «розе» есть чередование, периодичность, наличие двух состояний. Хотя исходный ряд не является геометрическим объектом в стандартном смысле, его поведение легко визуализируется как траектория значений частичных сумм по индексам: они прыгают между 0 и 1. Такой образ действительно напоминает многолепестковую структуру, где «лепестки» соответствуют различным режимам в ходе вычисления.

В то же время важно не подменять визуализацию формальным доказательством. «Роза» помогает запомнить механизм: скачки, отсутствие предела, потребность в суммировании расширенного типа. Но итоговое численное значение $1/2$ рождается не из внешнего сходства с фигурой, а из конкретных предельных процедур, которые можно проверить.

Сегодня «роза Гранди» служит учебным примером в нескольких задачах.

Во-первых, она формирует привычку различать:

- вычисление конечной суммы;
- анализ сходимости бесконечного ряда;
- применение суммирования в расширенном смысле (например, Цезаро и Абель).

Во-вторых, она показывает, что «регуляризация» может быть не произволом, а элементом согласованной теории. Если выбранный метод суммирования соответствует свойствам, полезным в контексте (например, согласованность с пределами аналитических продолжений или с усреднением), то полученное число оказывается устойчивой характеристикой объекта.

В-третьих, «роза» связана с общим философским тезисом: бесконечные процессы требуют не только вычислений, но и языка, который определяет, что считать результатом. Иначе возникает ощущение, будто математика «меняет ответ по желанию».

Именно поэтому современные обзоры «Grandi's series» часто объясняют, почему в одном смысле ряд не имеет суммы, а в другом — имеет согласованное значение [4]. Так «парадокс» превращается из загадки в инструмент понимания.

Схематическое представление полярной кривой $r = a \cos(k\theta)$ для значений k из таблицы приведено на рисунке 1.

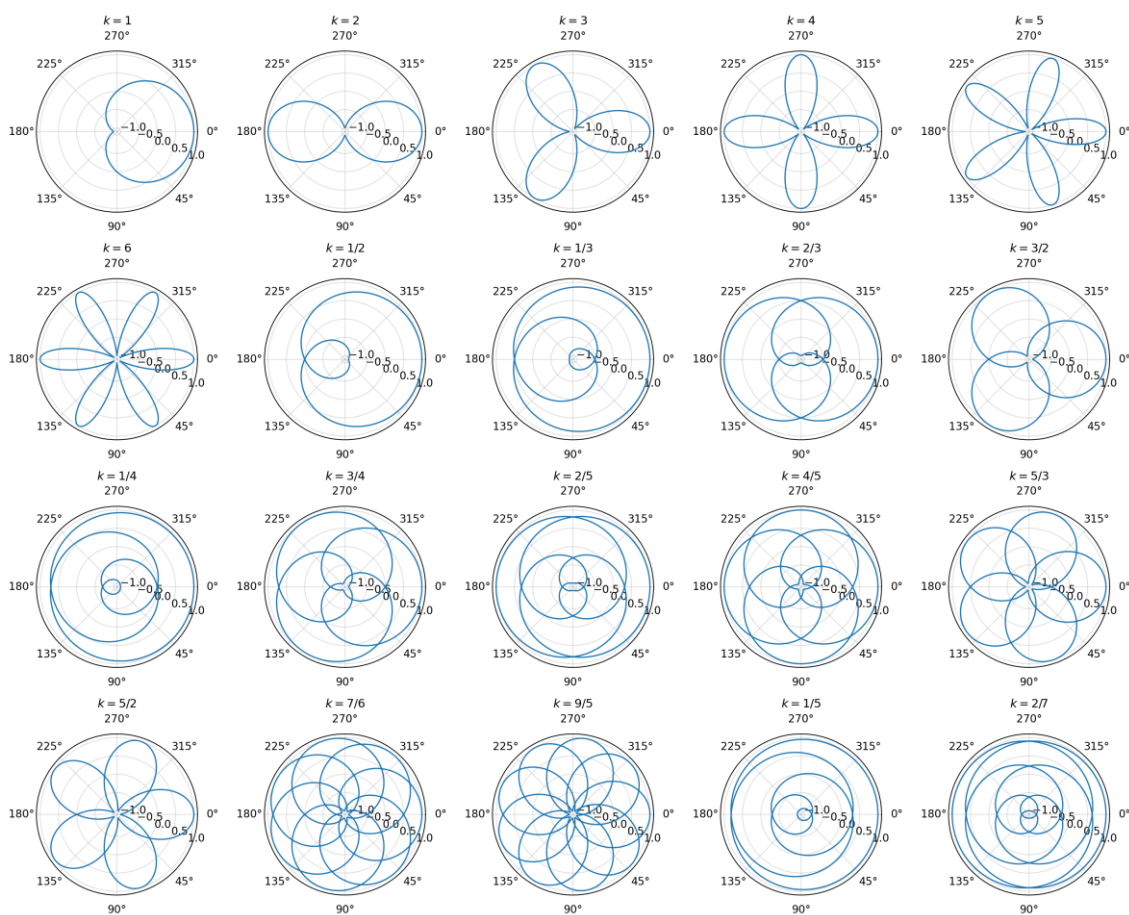


Рисунок 1 — Сетка полярных кривых для значений k из таблицы 1: построение выполнено в декартовых координатах по параметризации

«Роза Гвидо Гранди» — это не про тайну в смысле мистики бесконечности, а про строгость определений и про то, как выбор метода извлечения численного значения влияет на результат. Ряд $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ в обычном смысле расходится: частичные суммы колеблются между 0 и 1, поэтому предела нет. Однако в рамках суммирования Абеля и Цезаро возникает согласованное значение $1/2$.

Исторический след здесь ведет к работе Гранди начала XVIII века [2] и к отражению парадоксального поведения серии в последующих обзорных источниках [3]. А современная теория суммирования показывает, что полученное число корректно понимается только как значение в определенном расширенном смысле [4]. В итоге «роза» остается полезной моделью: она учит не просто считать бесконечное, а определять, как именно его следует считать.

Список использованных источников:

[1] Grandi, G. *Quadratura circuli, et hyperbolae per infinitas hyperbolas, & parabolae quadrabiles geometricae exhibita, & demonstrata*. Pisis [Pisa]: Francesco Bindi, 1710. — 160 p.
 [2] O'Connor J. J., Robertson E. F. *Guido Grandi (1671–1742)* [Электронный ресурс]. — URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grandi/> (дата обращения: 25.03.2026).
 [3] *History of Grandi's series* [Электронный ресурс]. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Grandi%27s_series (дата обращения: 25.03.2026).
 [4] *Summation of Grandi's series* [Электронный ресурс]. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Summation_of_Grandi%27s_series (дата обращения: 25.03.2026).