ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Климук С.П., Кравченко В.С., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Степанова Т.С. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Работа посвящена исследованию эффективности методов вычисления кратных интегралов с использованием метода Монте-Карло в условиях роста размерности и усложнения областей интегрирования.

В современных задачах вычислительной математики, статистики, физики и инженерии особую актуальность приобретает разработка эффективных численных методов для вычисления кратных интегралов, возникающих при моделировании сложных многомерных процессов и исследовании геометрии сложных тел. Существенное возрастание размерности рассматриваемых задач, а также сложная геометрия областей интегрирования делают применение классических методов (таких как квадратурные формулы и сеточные методы) вычислительно затратным или практически невозможным. В этих условиях значительный интерес представляет метод Монте-Карло, основанный на использовании случайных выборок и статистических оценок искомых интегралов.

Метод Монте-Карло заключается в том, что вместо сложного вычисления кратного интеграла функция вычисляется в случайно выбранных точках области, после чего находится среднее значение этих вычислений. Полученное среднее, с учётом объёма области, даёт приближённое значение интеграла. Такой подход позволяет существенно упростить вычисления, особенно для задач высокой размерности и областей сложной формы.

Пусть функция y = f(x_1, ..., x_m) непрерывна в ограниченной замкнутой области G и требуется вычислить m-кратный интеграл I по области G:

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{m})\mathrm{dx}_1 \ldots \mathrm{dx}_\mathrm{m}. \qquad (1)$$

Геометрически число I представляет собой (m + 1) - мерный объем вертикального цилиндрического тела в пространстве $0\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{m}\mathrm{y}$, построенного на основании G и ограниченного сверху данной поверхностью y = f(x), где x = (x_1, . . . , x_m).

Преобразуем интеграл так, чтобы новая область интегрирования Ω целиком содержалась внутри единичного m-мерного куба. Пусть область интегрирования G расположена в m-мерном параллелепипеде $a_k \le x_k \le b_k$ (k = 1, . . . , m).

Произведём замену переменных: $\mathrm{x_k} = \mathrm{a_k} + (\mathrm{b_k} - \mathrm{a_k})\xi_\mathrm{k}\ (\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{m})$.

Тогда m-мерный параллелепипед преобразуется в m-мерный единичный куб 0 ≤ ξ_k ≤ 1
(k = 1, . . . , m), и, следовательно, новая область интегрирования Ω будет целиком расположена внутри этого единичного куба. Вычислим якобиан преобразования:

$$\frac{D(x1,\ldots,xm)}{D(\xi1,\ldots,\xi m)} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m - a_m \end{pmatrix} = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m) \qquad (2)$$

Таким образом, $I = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m) \cdot J$, (3)

где $J = \int_\Omega f[a_1 + (b_1 - a_1)\xi_1, \ldots, a_m + (b_m - a_m)\xi_m] d\xi_1 \ldots d\xi_m$
и область интегрирования Ω содержится внутри m-мерного единичного куба 0 ≤ ξ_k ≤ 1 (k = 1, . . . , m).

Пусть *F*(ξ_1, . . . , ξ_m) = $f[a_1 + (b_1 - a_1)\xi_1, \ldots, a_m + (b_m - a_m)\xi_m]$.

Выберем N равномерно распределенных на отрезке [0, 1] последовательностей случайных чисел. Рассмотрим случайные точки $\mathrm{M_i}(\xi_1^{\,\mathrm{i}}, \xi_2^{\,\mathrm{i}}, \ldots, \xi_\mathrm{m}^{\,\mathrm{i}})$. Выбрав достаточно большое N число точек $\mathrm{M_1}, \ldots, \mathrm{M_n}$ проверяем, какие из них принадлежат области Ω. Пусть n точек принадлежат области Ω.

Взяв достаточно большое n точек M_i , $\tilde{F}_{cp}$ приближенно равен

$$\tilde{F}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(M_i) \quad (4)$$

откуда оценка интеграла J выражается формулой

$$\tilde{J} = \tilde{F}_{cp} \cdot \Omega, \quad (5)$$

где под Ω понимается m-мерный объем области интегрирования Ω. Если вычисление объема Ω затруднительно, то можно принять $\tilde{\Omega} = \frac{n}{N}$ (из определения геометрической вероятности).

Таким образом, имеем оценку $\tilde{I}$ искомого интеграла I:

$$\tilde{I} = V \cdot \tilde{F}_{cp} \cdot \tilde{\Omega} \quad (6)$$

где $V = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$ – объем параллелепипеда, ограничивающего исходную область интегрирования G. Отсюда получаем

$$\tilde{I} = \frac{V}{N} \sum_{i=1}^{n} F(M_i) \quad (7)$$

Сравним разные способы нахождения кратного интеграла третьей степени:

$$\int_{0}^{1.5} \int_{-2}^{0.75} \int_{x^2+y^2}^{2} e^{-x}\, dz\, dy\, dx$$

Интеграл от функции представляет собой объем некого тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$. Объем тела с точностью до 7 знаков: $I \approx 1.0405414$

Результат вычисления интеграла численно методом прямоугольников при 1000 точках: ≈0.95

При увеличении количества точек в каждом измерении растет точность, но при этом очень сильно растет сложность, ведь уже при 20 разбиениях будет 8000 точек.

Метод Монте-Карло показал более точные результаты с ростом количества выбранных точек, результаты отображены в таблице 1.

Таблица 1 – Приблизительное значение интеграла при разном количестве точек.

N	$\tilde{I}$
30	0.91
50	0.98
100	1.02
500	1.039

В итоге, сравнивая полученные результаты вычисления кратного интеграла с его точным значением, можно сказать, что метод Монте-Карло является более предпочтительным способом нахождения значения интеграла, чем метод прямоугольников, из-за своей точности при значительно меньших вычислительных затратах. Таким образом метод Монте-Карло является очень мощным инструментом для нахождения сложных неберущихся интегралов и кратных интегралов при увеличении размерности задачи. Данный метод открывает возможности для решения сложных многомерных задач при сравнительно небольших усилиях, ведь один программист, реализовав программу по нахождению суммы n количества случайных точек, может сэкономить огромные вычислительные ресурсы.

Список использованных источников:

1. Соболь, И.М. Численные методы Монте-Карло : учеб. пособие – М. : Изд-во Моск. ун-та : Наука, 1973, с. 93-96

2. Сайт Научно-исследовательского института наноматериалов ФГБОУ ВО «Ивановский Государственный Университет»[Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://nano.ivanovo.ac.ru/pdfs/2010_7_01_12_56_38_monte-carlo.pdf. -Дата доступа: 25.03.2026. с. 32-34

3. Решение интегралов онлайн с подробным решением[Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/integral/troinoi/. – Дата доступа: 01.04.2026.