УДК 519.6:004.4

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Кондратова У. О., Болбас К. В., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Степанова Т. С. – канд. физ -мат. наук, доцент

Аннотация. Статья посвящена сравнительному анализу итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений — Якоби, Гаусса–Зейделя и SOR. Алгоритмы реализованы в среде Wolfram Mathematica; построены графики убывания нормы невязки в логарифмическом масштабе, позволяющие наглядно оценить скорость сходимости каждого метода. Отдельно исследовано влияние параметра релаксации ω на эффективность метода SOR. Результаты вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими оценками сходимости, основанными на спектральном радиусе матрицы итераций.

Ключевые слова. СЛАУ, метод Якоби, метод Гаусса–Зейделя, метод SOR, итерационные методы, сходимость, норма невязки, спектральный радиус, Wolfram Mathematica.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) составляют основу численного решения широкого класса прикладных задач: дискретизации дифференциальных уравнений, задач теории упругости, электрических цепей, методов конечных элементов. При размерности системы порядка 10^3 и выше применение прямых методов (метод Гаусса, LU-разложение) нецелесообразно ввиду высокой вычислительной сложности и значительных требований к оперативной памяти. В таких случаях используются итерационные методы, которые строят последовательность приближений, сходящуюся к точному решению.

Теоретическим критерием сходимости стационарного линейного итерационного метода $x^{n+1} = Bx^{n1} + c$ служит условие $\rho(B) < 1$, где $\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы итераций. Скорость сходимости тем выше, чем меньше $\rho(B)$. Вместе с тем практическое сопоставление методов наглядно только при непосредственной визуализации итерационного процесса. Целью настоящей работы является реализация трёх классических итерационных методов в среде Wolfram Mathematica и визуальное сравнение динамики их сходимости.

Метод Якоби. На каждой итерации все компоненты вектора приближения пересчитываются одновременно на основе значений предыдущего шага. Матрица итераций $B_{\square} = -D^{-1}(L+U)$, где D — диагональная часть матрицы A, L и U — строго нижняя и строго верхняя треугольные части. Метод сходится при выполнении условия строгого диагонального преобладания.

Метод Гаусса–Зейделя. При вычислении i-й компоненты немедленно используются уже обновлённые значения $x_1^{+1},...,x_{i-}^{1+1}$. Матрица итераций $B_{\square\square} = -(D+L)^{-1}U$. Для симметричных положительно определённых матриц доказано соотношение $\rho(B_{\square\square}) = [\rho(B_{\square})]^2$, что обеспечивает примерно двукратное ускорение сходимости по сравнению с методом Якоби.

Метод SOR. Метод последовательной верхней релаксации обобщает метод Гаусса–Зейделя введением параметра $\omega \in (0, 2)$: обновлённое значение компоненты вычисляется как выпуклая комбинация старого значения и результата шага Гаусса–Зейделя. При $\omega = 1$ метод совпадает с Гаусса–Зейделем; при $\omega > 1$ происходит ускоряющая перерелаксация. Согласно теореме Кана, необходимым условием сходимости является $\omega \in (0, 2)$.

В качестве тестовой использовалась трёхдиагональная матрица $A \in \mathbb{R}^{20\times 20}$ с диагональными элементами 4 и внедиагональными −1. Данная матрица возникает при конечно-разностной аппроксимации одномерного уравнения Пуассона и обладает строгим диагональным преобладанием, что гарантирует сходимость всех трёх методов. Начальное приближение принималось нулевым; критерий остановки — $||b - Ax^{n1}|| < 10^{-6}$.

Каждый метод реализован в виде отдельной функции, возвращающей вектор приближения, список норм невязок по итерациям и итоговое число шагов. Ниже приведён код метода Якоби:

```
Jacobi[A_, b_, x0_, eps_:10^-6, max_:500] :=
  Module[{n=Length[b], x=N[x0], xNew, norms, k=0},
    norms = {Norm[b - A.x]};
    While[Last[norms] > eps && k < max,
      xNew = Table[(b[[i]] -
        Sum[If[j!=i, A[[i,j]] x[[j]], 0], {j,n}])/A[[i,i]], {i,n}];
      x=xNew; AppendTo[norms,Norm[b-A.x]]; k++]; {x,norms,k}]
```

Методы Гаусса–Зейделя и SOR реализованы аналогично. В методе SOR после вычисления шага Гаусса–Зейделя gs применяется коррекция: x[[i]] = (1−ω)·x[[i]] + ω·gs. Для построения сравнительных графиков использована функция ListLogPlot с наложением кривых для трёх методов.

На рисунке 1 представлены графики убывания нормы невязки $||r^{n1}|| = ||b - Ax^{n1}||$ в логарифмическом масштабе для всех трёх методов. Логарифмический масштаб позволяет непосредственно оценить скорость линейной сходимости: наклон кривой равен $\log_{1\ 0} \rho(B)$, где $\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы итераций соответствующего метода.

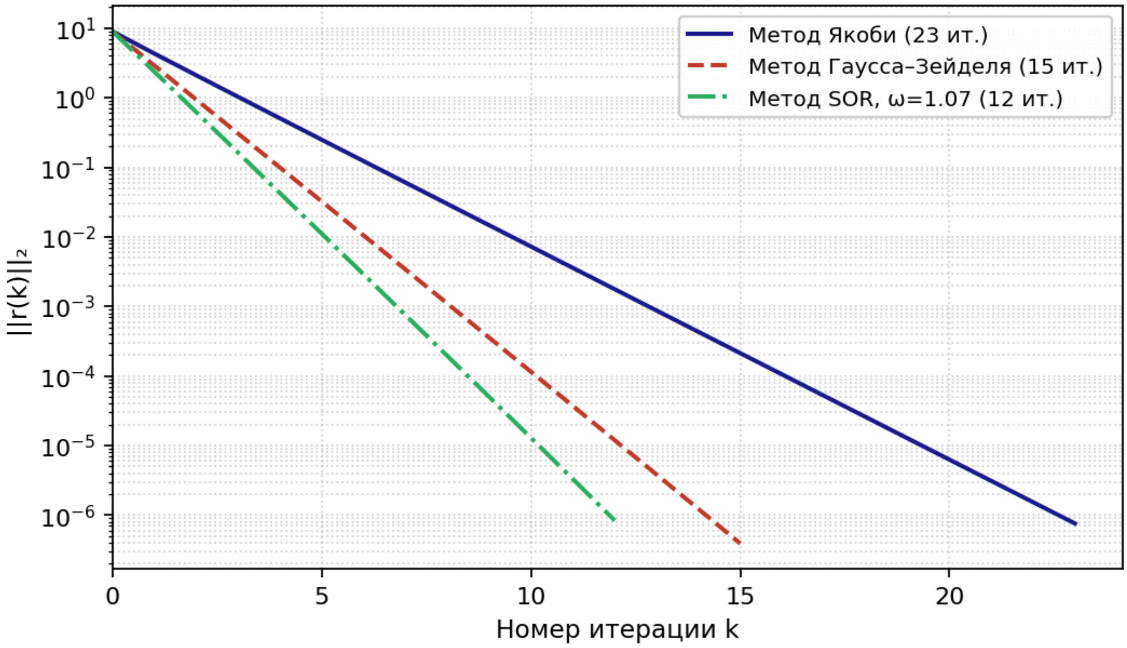

Рисунок 1 – Сходимость итерационных методов (логарифмическая шкала)

Результаты свидетельствуют о том, что метод Гаусса–Зейделя сходится примерно в 1.5 раза быстрее метода Якоби, что соответствует теоретическому соотношению $\rho(B_{□□}) \approx [\rho(B_{□})]^2$. Метод SOR при $\omega = 1.07$ сходится за 12 итераций против 23 у метода Якоби. Количественное сравнение приведено в таблице 1.

Таблица 1 – Число итераций до достижения точности 10^{-6}

Метод	Итераций	Ускорение
Якоби	23	—
Гаусс–Зейдель	15	×1.5
SOR (ω = 1.07)	12	×1.9

На рисунке 2 представлена зависимость числа итераций метода SOR от параметра ω. Кривая имеет характерную U-образную форму с минимумом при $\omega^* \approx 1.07$. При ω менее 0.8 метод фактически замедляется относительно Гаусса–Зейделя; при ω выше 1.9 число итераций резко возрастает, а при $\omega \geq 2$ метод теряет сходимость, что согласуется с теоремой Кана.

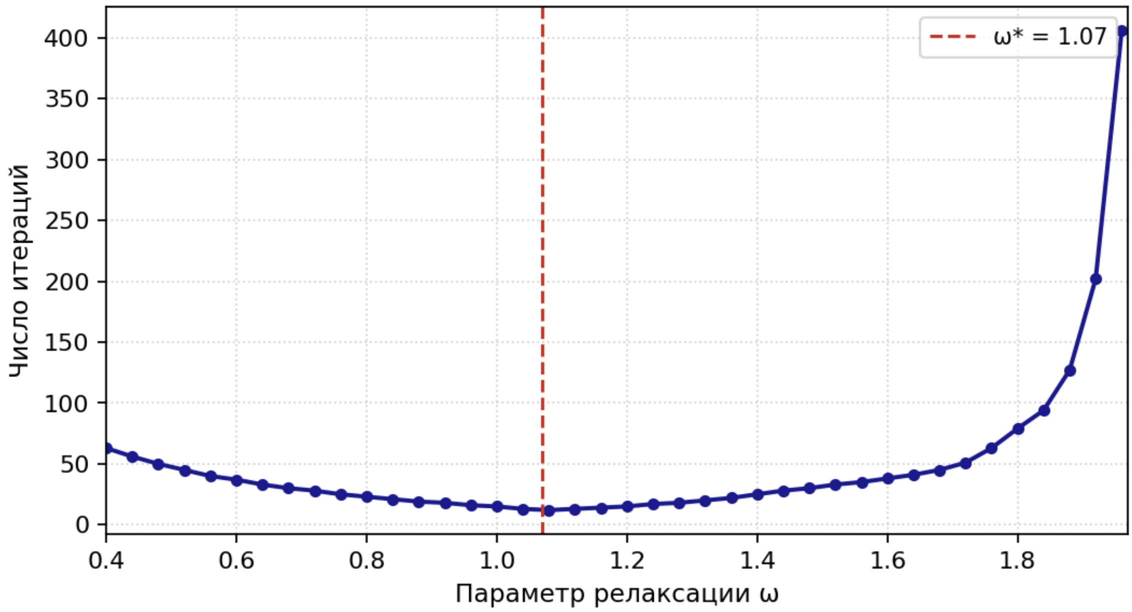

Рисунок 2 – Зависимость числа итераций метода SOR от параметра ω

В работе реализованы три итерационных метода решения СЛАУ — Якоби, Гаусса–Зейделя и SOR — в среде Wolfram Mathematica, проведено сравнение их скорости сходимости на тестовой трёхдиагональной системе. Визуализация в логарифмическом масштабе подтвердила теоретические оценки: метод Гаусса–Зейделя в 1.5 раза быстрее Якоби, метод SOR при оптимальном $\omega^* \approx 1.07$ — в 1.9 раза. Исследование зависимости числа итераций от ω показало характерный минимум и потерю сходимости при $\omega \geq 2$, что согласуется с теоремой Кана. Полученные результаты демонстрируют эффективность средств Wolfram Mathematica для визуального анализа итерационных алгоритмов и верификации теоретических оценок сходимости.

Список использованных источников:

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М. : Лаборатория Знаний, 2019. — 636 с.

2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М. : Наука, 1978. — 592 с.

3. Young D. M. Iterative Solution of Large Linear Systems. — New York : Academic Press, 1971. — 570 p.

4. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — 2nd ed. — Philadelphia : SIAM, 2003. — 528 p.

5. Wolfram Research. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://reference.wolfram.com. — Дата доступа: 12.03.2025.

UDC 519.6:004.4

VISUALIZATION OF CONVERGENCE OF ITERATIVE METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Kondratova U. O., Bolbas K. V., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Stepanova T. S. –Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Keywords. SLAE, Jacobi method, Gauss–Seidel method, SOR, iterative methods, convergence, residual norm, spectral radius, Wolfram Mathematica.

Annotation. The paper presents a comparative analysis of three iterative methods for solving systems of linear algebraic equations — Jacobi, Gauss–Seidel and SOR — implemented in Wolfram Mathematica. Residual norm decay graphs are plotted on a logarithmic scale to assess convergence rates. The influence of the relaxation parameter ω on the efficiency of the SOR method is investigated. The experimental results are consistent with theoretical convergence estimates based on the spectral radius of the iteration matrix.