

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ 4-ГО ПОРЯДКА

Шибает И. С.

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
г. Минск, Республика Беларусь*

Научный руководитель: Храмович Е. М., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры физики

Аннотация. Рассмотрено движение заряженной частицы в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях. Численное решение уравнений Лоренца получено методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Показано, что выбранный шаг интегрирования обеспечивает устойчивое описание винтовой траектории и дрейфа. Приведены таблицы параметров модели и первых шагов интегрирования, а также пример ручного расчета одного шага.

Ключевые слова: заряженная частица, скрещенные поля, уравнение Лоренца, метод Рунге-Кутты, численное моделирование.

Введение. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях лежит в основе работы плазменных устройств, масс-спектрометров, ускорителей и магнитных сепараторов. Даже при простых внешних условиях уравнения движения остаются нелинейными, а аналитическое решение быстро теряет наглядность. По этой причине на практике особенно полезны устойчивые и достаточно точные пошаговые методы интегрирования, среди которых метод Рунге-Кутты 4-го порядка занимает удачное промежуточное положение между точностью и вычислительной стоимостью [1, 2].

Физическая постановка задачи. Рассматривается частица с зарядом q и массой m в однородных полях $E = (800, 0, 0)$ В/м и $B = (0, 0,03/\sqrt{2}, 0,03/\sqrt{2})$ Тл. Поля взаимно перпендикулярны, поэтому траектория приобретает трехмерный характер. В качестве частицы выбран электрон: $q = -1,602 \times 10^{-19}$ Кл, $m = 9,109 \times 10^{-31}$ кг. Начальные условия заданы как $r_0 = (0, 0, 0)$ м и $v_0 = (4,0; 1,0; 1,0) \times 10^6$ м/с. Такой набор параметров дает наглядную траекторию на наносекундном интервале и позволяет оценить влияние поперечного дрейфа на движение в поле [3].

$$\begin{aligned} m \cdot dv/dt &= q(E + v \times B) \\ dr/dt &= v \end{aligned}$$

Здесь правая часть определяется мгновенной скоростью, поэтому задача относится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для такой системы особенно важна не только локальная точность, но и отсутствие накопления заметного фазового сдвига на нескольких десятках периодов гиродвижения.

Численный метод и алгоритм. Переход к методу Рунге-Кутты 4-го порядка удобнее описывать как последовательность из четырех оценок. На первом этапе используются текущие координаты и скорость. На втором и третьем этапах состояние уточняется в середине шага, а на четвертом – в его конце. В результате каждый шаг строится как взвешенное среднее четырех наклонов с весами 1:2:2:1. Такая схема особенно уместна здесь, поскольку в уравнении Лоренца ускорение зависит не только от координат, но и от скорости, а значит промежуточные точки должны обновляться согласованно.

При шаге $h = 5 \times 10^{-12}$ с из начального состояния получается ускорение $a_0 = (q/m)(E + v_0 \times B) \approx (-1,41 \times 10^{14}; 1,49 \times 10^{16}; -1,49 \times 10^{16})$ м/с². Если разложить первый шаг по

стадиям RK4, то уже на начальном подшаге скорость вдоль x уменьшается, а поперечные компоненты начинают поворачиваться в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. После первого шага получаем $r1 \approx (2,00 \times 10^{-5}; 5,19 \times 10^{-6}; 4,81 \times 10^{-6})$ м и $v1 \approx (3,998 \times 10^6; 1,075 \times 10^6; 0,925 \times 10^6)$ м/с. Эти числа служат не только проверкой кода, но и ориентиром: ошибка округления на таком шаге остается намного меньше самого физического изменения за шаг. Параметрв модели представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры модели

Параметр	Значение
Заряд частицы q	$-1,602 \times 10^{-19}$ Кл
Масса частицы m	$9,109 \times 10^{-31}$ кг
Электрическое поле E	$(800, 0, 0)$ В/м
Магнитное поле B	$(0, 0,03/\sqrt{2}, 0,03/\sqrt{2})$ Тл
Начальная скорость $v0$	$(4,0; 1,0; 1,0) \times 10^6$ м/с
Начальная координата $r0$	$(0, 0, 0)$ м
Шаг интегрирования h	5×10^{-12} с
Интервал расчета	20 нс

Таблица 1 показывает расчетные условия, при которых траектория сохраняет видимую трехмерную структуру без чрезмерного роста координат на коротком временном промежутке.

На рисунке 1 видна винтовая траектория с дрейфом в направлении электрического поля. Проекция на координатные плоскости подтверждают, что поперечные колебания связаны с магнитной составляющей, а медленный рост координат вдоль направления результирующего переноса определяется электрическим полем.

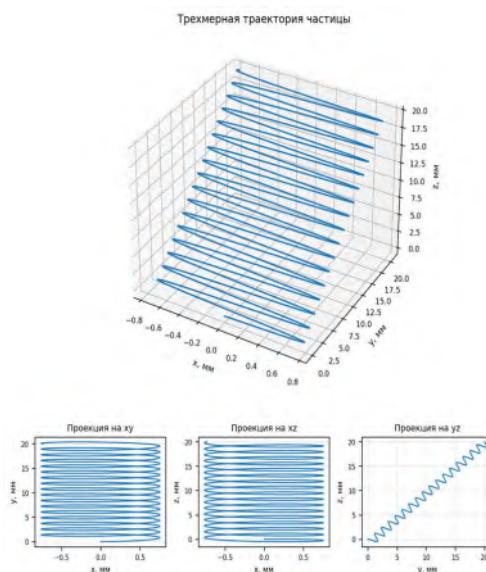


Рисунок 1 - Траектория заряженной частицы в скрещенных полях

Первые шаги интегрирования. Для выбранных параметров характерный циклотронный период составляет примерно 1,19 нс, тогда как шаг интегрирования равен 5 пс. На один период приходится порядка 240 шагов, поэтому дискретизация достаточно плотная, чтобы не исказить фазу вращения. Оценка дрейфовой скорости E/B дает величину порядка $2,7 \times 10^4$ м/с; именно такой медленный перенос и проявляется как плавный рост координат на фоне быстрых поперечных колебаний. Тем самым численные таблицы согласуются с физической картиной движения в скрещенных полях.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка дает устойчивое и наглядное описание движения заряженной частицы в скрещенных полях при разумном выборе шага интегрирования. На

рассматриваемом интервале видно сочетание поперечных колебаний, вызванных магнитным полем, и направленного переноса, обусловленного электрическим полем. Для учебной и прикладной постановки такой подход удобен тем, что сохраняет физическую интерпретацию траектории и не требует сложной численной инфраструктуры.

При более сильных полях или большем времени моделирования полезно дополнительно контролировать локальную погрешность, например сравнением решений на двух шагах или использованием адаптивного шага. Для учебной постановки выбранная схема уже достаточна: она показывает влияние полей разной природы и дает результаты, которые легко проверить по первым шагам интегрирования. Координаты представлены в таблице 2.

Таблица 2 - Координаты

n	t, пс	x, мм	y, мм	z, мм	vx, км/с	vy, км/с	vz, км/с
0	0	0.000000	0.000000	0.000000	4000.000	1000.000	1000.000
1	5	0.019996	0.005187	0.004813	3997.905	1074.605	925.395
2	10	0.039974	0.010746	0.009254	3993.027	1149.145	850.855
3	15	0.059922	0.016678	0.013322	3985.370	1223.569	776.431
4	20	0.079823	0.022981	0.017019	3974.939	1297.823	702.177
5	25	0.099666	0.029656	0.020344	3961.742	1371.857	628.143

По данным таблицы 2 координаты растут плавно, а поперечные компоненты скорости меняются взаимосвязанно. Это согласуется с действием силы Лоренца: магнитное поле разворачивает вектор скорости, а электрическое поле сообщает частице направленный перенос.

Ссылки на литературу

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 8-е изд., стер. М.: Физматлит, 2004. 536 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
4. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 2nd ed. Berlin: Springer, 1993. 528 p.
5. Runge-Kutta method [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://mathworld.wolfram.com/Runge-KuttaMethod.html>. Дата доступа: 22.03.2026.

Примечание. Для построения графиков использован код на Python, приведённый в отдельном файле. Полный архив с программой доступен по запросу. Верификация на первых шагах подтверждает согласование численных значений с ожидаемой физической картиной.

UDC 004.42:378

MODELING OF A CHARGED PARTICLE MOTION IN CROSSED ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS BY THE 4TH-ORDER RUNGE-KUTTA METHOD

Shibaev I.S.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Khramovich E. M., – Cand. of Phys. and Math. Sci., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics

Annotation. The motion of a charged particle in uniform crossed electric and magnetic fields is studied. The Lorentz equations are solved numerically by the fourth-order Runge-Kutta method. The selected step size reproduces the spiral drift trajectory with sufficient accuracy. Tables of model parameters and the first integration steps are presented together with a hand-calculated example.

Keywords: charged particle, crossed fields, Lorentz equation, Runge-Kutta method, numerical simulation.