

АЛГОРИТМ ОБОСНОВАНИЯ ВЫБОРА МЕТОДА СВЁРТКИ ВЕСОВ ДУГ ОРГРАФА

В статье предлагается алгоритм для обоснованного выбора метода свёртки векторных весов дуг из двух альтернатив для решения задачи построения дерева кратчайших расстояний минимальной стоимости.

Введение

При поиске оптимальных маршрутов в транспортных системах часто возникает необходимость учитывать каким-то образом векторные веса дуг, т. е. учитывать несколько критериев, в общем случае противоречащих друг другу. Например, в сети с двухкомпонентными весами дуг, представляющими расстояние (d) и стоимость (c), необходимо найти компромиссное решение, которое позволит эффективно учесть оба этих критерия. Для этого необходимо обосновать метод свёртки (конвертации) частных весов дуг в обобщённый вес для сведения задачи с векторным критерием оптимальности к задаче со скалярным критерием. Существует много различных способов свёртки векторного критерия в скалярный [1, 2]. Предлагается в качестве двух конкурирующих альтернатив скаляризации весов дуг рассматривать аддитивное и мультипликативное преобразования.

I. Скаляризация частных весов дуг орграфа

В транспортной сети, представленной графом G , каждое ребро (дуга) имеет два веса: d_{ij} – расстояние (в километрах) и c_{ij} – стоимость (в денежных единицах). Естественно, что дерево кратчайших расстояний и дерево маршрутов минимальной стоимости в общем случае не совпадут. Рассмотрим два основных подхода к свёртке векторных весов: аддитивное и мультипликативное преобразования частных весов с предварительной их нормализацией [2]. В случае использования аддитивного (линейного) преобразования для расчёта веса w_{ij} дуги (i, j) используется формула:

$$w_{ij} = \lambda d'_{ij} + (1 - \lambda) c'_{ij}, \quad (1)$$

а в случае мультипликативного преобразования – формула

$$w_{ij} = d'_{ij}{}^{\lambda} \cdot c'_{ij}{}^{(1-\lambda)}, \quad (2)$$

где d'_{ij} и c'_{ij} – числовые безразмерные оценки, пронормированные по одной шкале в интервале $(0, 1]$; λ – коэффициент важности (полезности) ($0 \leq \lambda \leq 1$). Подходы к нормализации частных весов дуг для разных типов преобразований [см. формулы (1), (2)] рассматриваются в следующем разделе.

II. Нормализация частных весов дуг орграфа

При нормализации частных весов (расстояния и стоимости) будем придерживаться следующих положений. Будем считать вполне естественным, что частные веса дуг являются положительными числами, большими нуля, т. е. $d_{ij} > 0$ и $c_{ij} > 0$. Дело в том,

что если значение «нуль» включать в оценки частных весов, то при их нормировании и последующей мультипликативной свёртке по формуле (2) скалярный вес автоматически станет нулевым, независимо от нормированного значения второго частного веса. Частные (ненормированные) веса дуг орграфа G заданы матрицами расстояний D и стоимостей C соответственно. Если положить, что нормирование весов будет происходить по формулам

$$d'_{ij} = d_{ij} / \max D, \quad c'_{ij} = c_{ij} / \max C, \quad (3)$$

где $\max D$ и $\max C$ – максимальные значения элементов в матрицах расстояний D и стоимостей C соответственно, то полученные таким образом безразмерные частные веса дуг будут пронормированы по одной шкале значений из интервала $(0, 1]$ и будут удовлетворять нашим выдвинутому положением. В этом случае и скалярные веса дуг, полученные в результате преобразований (1) или (2), также будут принадлежать интервалу $(0, 1]$ при любых значениях коэффициента λ ($0 \leq \lambda \leq 1$). Полученные же при этом скалярные по формулам (1), (2) в общем случае будут отличаться друг от друга вследствие различия подходов к «усреднению» частных весов.

III. Критерий выбора метода свёртки весов дуг орграфа

Для построения дерева кратчайших расстояний минимальной стоимости необходимо окончательно определиться с методом свёртки весов дуг орграфа G из предлагаемых двух альтернатив (см. раздел 1). На основании заданных матриц весов D и C транспортной сети и заданного коэффициента λ после скаляризации векторных весов дуг орграфа по формулам (1) и (2) мы получим две матрицы скалярных весов дуг $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ соответственно, причём $W_1(0) = W_2(0)$ и $W_1(1) = W_2(1)$. При этом орграф G транспортной сети должен быть сильно-связным (сильным), чтобы в качестве корневой вершины ориентированного дерева кратчайших путей могла выступать любая вершина орграфа, а в случае неориентированного графа транспортной сети необходимо, чтобы граф был, просто, связным [3]. В качестве численной оценки построенного дерева кратчайших расстояний минимальной стоимости будет выступать сумма скалярных весов дуг полученного дерева $T_{1(2)}(\lambda)$, т. е. $w[T_{1(2)}(\lambda)]$. Тогда показателем меры отклонения «оптимального» дерева $T_{1(2)}^*(\lambda)$ кратчайших путей с векторными весами дуг, полученного на основе матрицы $W_1(\lambda)$ [или $W_2(\lambda)$], от действительно оптимального $T^*(1)$ (дерева кратчайших расстояний) [или $T^*(0)$ (дерева минимальной стоимости)], может служить

следующий показатель:

$$\Delta_{1(2)}(\lambda) = \{w[T_{1(2)}(\lambda)] - w[T^*(1)]\} + \{w[T_{1(2)}(\lambda)] - w[T^*(0)]\} = 2w[T_{1(2)}(\lambda)] - w[T^*(1)] - w[T^*(0)]. \quad (4)$$

Очевидно, что $\Delta_{1(2)}(\lambda) > 0$ при любых $0 < \lambda < 1$.

В качестве критерия выбора метода свёртки векторных весов – аддитивного или мультипликативного – предлагается следующий критерий:

$$\min_{1,2} \left\{ \sum_{\lambda=\{0,25;0,50;0,75\}} \Delta_1(\lambda); \sum_{\lambda=\{0,25;0,50;0,75\}} \Delta_2(\lambda) \right\}, \quad (5)$$

где значение индекса 1 или 2 означает аддитивный или мультипликативный метод скаляризации векторных весов соответственно.

Если при последовательном задании значений коэффициента важности λ из множества дискретных значений $\{0, 25; 0, 50; 0, 75\}$ с последующей скаляризацией векторных весов по формулам (1), (2) и нахождением «оптимального» дерева кратчайших путей окажется, что накопленная сумма отклонений «оптимального» дерева от действительно оптимальных $T^*(1)$ и $T^*(0)$ будет меньше при аддитивном преобразовании частных весов (индекс «1»), то именно этот способ скаляризации ляжет в основу решения задачи нахождения дерева кратчайших расстояний минимальной стоимости, в противном случае (индекс «2») – мультипликативный способ скаляризации весов.

IV. Алгоритм обоснования выбора метода свёртки весов дуг орграфа

На основании вышеизложенного предлагается следующий укрупнённый алгоритм обоснования выбора метода скаляризации векторных весов дуг орграфа при решении задачи поиска дерева кратчайших расстояний минимальной стоимости на транспортной сети:

– шаг 1 – задаётся орграф G транспортной сети с векторными двухкомпонентными весами дуг, задаваемыми матрицами расстояний D и стоимостей C , произвольно выбирается корневая вершина для поиска множества будущих корневых деревьев;

– шаг 2 – производится нормирование весов матриц D и C по формулам (3), в результате чего получаются матрицы D' и C' соответственно;

– шаг 3 – на основании матрицы D' с помощью, например, алгоритма Дейкстры [3], находится дерево кратчайших расстояний $T^*(1)$, а на основании матрицы C' – дерево минимальной стоимости $T^*(0)$;

– шаг 4 – при последовательном задании коэффициента важности λ из множества дискретных значений $\{0,25; 0,50; 0,75\}$ при каждом значении λ решаются следующие задачи: расчёт скалярных весов по формулам (1), (2) и нахождение соответствующих «оптимальных» деревьев $T_1(\lambda)$, $T_2(\lambda)$;

– шаг 5 – подсчёт суммарного отклонения весов деревьев $T_1(\lambda)$, $T_2(\lambda)$ от оптимальных $T^*(1)$, $T^*(0)$ [см. формулы (4), (5)];

– шаг 6 – на основании критерия (5) решается вопрос скаляризации векторных весов либо в пользу аддитивного способа, либо – мультипликативного.

Вопрос выбора порядка n (числа вершин) и порядка m (числа рёбер) орграфа G заслуживает отдельного рассмотрения.

Заключение

Решение задачи построения дерева кратчайших расстояний минимальной стоимости сводится не столько к поиску «нового» алгоритма оптимизации в противовес известным, сколько к обоснованию выбора того или иного способа скаляризации векторных весов и использованию известных алгоритмов поиска ориентированного дерева минимального веса для нахождения компромиссного решения [3].

Список литературы

- [1] Поиск оптимальных путей на графах с векторными весами : методическая разработка по курсу «Методы оптимизации». Издание второе, переработанное и исправленное. / Сост. С. Ю. Городецкий. – Н. Новгород : Нижегородский государственный университет, 2004. – 33 с.
- [2] Системный анализ и принятие решений в проектной и управленческой деятельности : учеб.-метод. пособие / Б. В. Никульшин [и др.]. – Минск : БГУИР, 2021. – 72 с.
- [3] Прикладные алгоритмы на графах : учеб. пособие / А. В. Александров, М. С. Беспалов, М. Ю. Звягин. – Владимир : Владимир. гос. ун-т, 2005. – 66 с.

Служалик Владимир Юльянович, магистрант кафедры информационных технологий автоматизированных систем БГУИР, sluzhalik@bsuir.by.

Научный руководитель: Севернёв Александр Михайлович, кандидат технических наук, доцент, доцент каф. ИТАС, severnev@bsuir.by.