

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Реализована симуляция системы Солнце–Земля–Луна на C++ симплектическим методом Верле [4]. Верификация на двухтелесной задаче даёт дрейф энергии $|\Delta E/E_0| = 1,17 \cdot 10^{-6}$. Трёхтелесная симуляция за 10 лет показывает стабильный дрейф в диапазоне $4,44\text{--}4,53 \cdot 10^{-10}$ без нарастающего тренда, что свидетельствует о численной устойчивости метода на длительном интервале моделирования.

Введение

Задача трёх и более гравитирующих тел не имеет аналитического решения в общем случае [1], что делает компьютерное моделирование основным инструментом исследования динамики таких систем. Именно методами численного моделирования были установлены хаотичность орбиты Меркурия и устойчивость пояса астероидов Юпитера [1]. Корректность симуляции на больших временных интервалах определяется выбором численного интегратора. Метод Эйлера первого порядка использует ускорение лишь из начала шага, что делает схему несимметричной по времени и приводит к систематическому росту полной энергии системы. Симплектические интеграторы, в отличие от метода Эйлера, сохраняют модифицированную энергию системы на произвольном интервале времени [2]. Цель работы — реализовать на C++ симуляцию системы Солнце–Земля–Луна методом Верле и исследовать численную устойчивость интегратора на длительном интервале.

I. Метод и реализация

Для системы N тел ускорение i -го тела определяется суммой попарных гравитационных взаимодействий [3]:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1)$$

Полная механическая энергия системы:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2)$$

Относительный дрейф $|\Delta E/E_0| = |E(t) - E(0)|/|E(0)|$ служит численным критерием качества интегратора.

Интегрирование выполняется симплектическим методом Верле второго порядка [3]. Схема включает два шага: обновление положения с учётом текущего ускорения:

$$\mathbf{r}(t+dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) dt + \frac{1}{2} \mathbf{a}(t) dt^2, \quad (3)$$

и обновление скорости по среднему ускорениям на концах шага:

$$\mathbf{v}(t+dt) = \mathbf{v}(t) + \frac{1}{2} [\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t+dt)] dt. \quad (4)$$

Усреднение в (4) обеспечивает обратимость схемы по времени и симплектичность [2]; ускорения

пересчитываются дважды за шаг — до и после обновления позиций по (3). Алгоритм перебирает все пары (i, j) , $i < j$, обновляя ускорение обоих тел за одну итерацию по третьему закону Ньютона; сложность — $O(N^2)$ на шаг. Полная реализация на C++ доступна в [4].

II. Результаты

Верификация метода (2 тела). На системе Земля–Луна ($r_0 = 3,844 \cdot 10^8$ м) аналитический период по третьему закону Кеплера:

$$T_{\mathcal{L}} = 2\pi \sqrt{r_0^3 / [G(m_{\oplus} + m_{\mathcal{L}})]} = 27,285 \text{ сут} \quad (5)$$

отличается от реального (27,322 сут) на 0,13%. При $dt = 3600$ с метод Верле даёт $|\Delta E/E_0| = 1,17 \cdot 10^{-6}$, метод Эйлера — $1,36 \cdot 10^{-4}$ (хуже в 116 раз). Полученные значения дрейфа демонстрируют квадратичное уменьшение при уменьшении шага интегрирования (табл. 1).

Таблица 1 – Дрейф энергии метода Верле (2 тела)

$dt, \text{с}$	$ \Delta E/E_0 $
7200	$4,66 \cdot 10^{-6}$
3600	$1,17 \cdot 10^{-6}$
1800	$2,94 \cdot 10^{-7}$
900	$7,34 \cdot 10^{-8}$

Симуляция Солнце–Земля–Луна (3 тела). Система моделировалась 10 лет (87 600 шагов, $dt = 3600$ с). Аналитический период Земли вокруг Солнца:

$$T_{\oplus} = 2\pi \sqrt{r_{\oplus}^3 / [G(M_{\odot} + m_{\oplus})]} = 365,21 \text{ сут}, \quad (6)$$

что отличается от реального (365,25 сут) на 0,01%.

Дрейф полной энергии (2) по годам приведён в табл. 2. Значения стабильны в диапазоне $4,44\text{--}4,53 \cdot 10^{-10}$ без нарастающего тренда, что свидетельствует о численной устойчивости метода на интервале моделирования. Следует отметить, что прямое сопоставление дрейфа в двух- и трёхтелесной постановках требует осторожности: величина $|\Delta E/E_0|$ зависит от энергетического масштаба системы и начальных условий. В обоих случаях метод демонстрирует хорошее сохранение энергии (2).

Таблица 2 – Дрейф энергии и среднее расстояние Земля–Луна по годам (3 тела)

Год	$ \Delta E/E_0 $	$\bar{r}_{EM}, \text{ км}$
1	$4,46 \cdot 10^{-10}$	377 300
2	$4,49 \cdot 10^{-10}$	377 561
3	$4,53 \cdot 10^{-10}$	377 242
4	$4,52 \cdot 10^{-10}$	377 462
5	$4,45 \cdot 10^{-10}$	377 477
6	$4,51 \cdot 10^{-10}$	377 224
7	$4,52 \cdot 10^{-10}$	377 496
8	$4,47 \cdot 10^{-10}$	377 388
9	$4,49 \cdot 10^{-10}$	377 245
10	$4,44 \cdot 10^{-10}$	377 604

Среднее расстояние Земля–Луна по модели — 377 400 км против реального 384 400 км (отклонение 1,8%). Расхождение объясняется тем, что начальные орбиты заданы круговыми, тогда как реальные — эллиптические ($e_L = 0,055$).

III. Обсуждение

Модель использует ряд упрощений: движение ограничено двумя измерениями, начальные орбиты круговые, не учитываются возмущения со стороны других планет [1]. Поэтому полученные результаты следует интерпретировать как проверку численной устойчивости интегратора на упрощённой небесномеханической системе, а не как высокоточную астрономическую модель.

Тем не менее симплектические методы демонстрируют свойства, необходимые для реальных астрофизических расчётов: они реализованы в специ-

ализированных пакетах моделирования планетных систем, таких как REBOUND и GROMACS [2]. Дальнейшее развитие работы может включать переход к трёхмерной постановке, использование реалистичных начальных орбитальных элементов и применение алгоритма Барнса–Хата со сложностью $O(N \log N)$, что открывает возможность моделирования звёздных скоплений и галактик.

Заключение

Верификация на двухтелесной задаче подтверждает корректность метода Верле: орбитальный период воспроизводится с точностью 0,13%, дрейф энергии в 116 раз ниже, чем у метода Эйлера. Трёхтелесная симуляция системы Солнце–Земля–Луна за 10 лет показывает стабильный дрейф $4,44\text{--}4,53 \cdot 10^{-10}$ без нарастающего тренда, что свидетельствует о численной устойчивости симплектического интегратора на длительном интервале моделирования. Применение симплектических методов является необходимым условием физически достоверного долгосрочного моделирования гравитационных систем [2].

Список литературы

1. Aarseth, S. J. Gravitational N -Body Simulations / S. J. Aarseth. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. — 430 с.
2. Hairer, E. Geometric Numerical Integration / E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. — Berlin: Springer, 2006. — 644 с.
3. Verlet, L. Computer Experiments on Classical Fluids / L. Verlet // Physical Review. — 1967. — Vol. 159, № 1. — P. 98–103.
4. Гарбар А. Е. cosmos: N-body gravitational simulation // GitHub. — URL: https://github.com/damseletteX/gravitational_simulation — 2026.

Гарбар Александра Евгеньевна, студент 1 курса факультета информационных технологий и управления, БГУИР, Al.Narbar@proton.me.

Научный руководитель: Шатилова Ольга Олеговна, старший преподаватель кафедры вычислительных методов и программирования, магистр технических наук, БГУИР, o.shatilova@bsuir.by.