

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ВЕРОЯТНОСТИ ПРОПУСКА ОШИБКИ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ВЕКТОРОВ ПЕРЕХОДОВ

И.П. КОБЯК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 5 апреля 2026

Аннотация. В работе рассмотрена методика формирования фрагмента производящей функции для вероятности пропуска ошибки предлагаемым методом свертки. При этом использованы частные реализации функции правдоподобия. Для достижения поставленной цели применена методика синтеза конечных разностей с последующей подстановкой результатов в исходное равенство. Основное назначение полученных равенств заключается в возможности определения численного значения интегральной площади под кривой плотности распределения вероятностей пропуска ошибки при наблюдении векторов переходов. Заданные системой наблюдения векторы рассматриваются в данной задаче в виде подмножества сложных событий в множестве всех векторов переходов.

Ключевые слова: производящая функция, сложные события, векторы переходов, вероятность пропуска ошибки, интеграл степенного ряда, факториальные моменты.

Введение

Как правило, в основной массе передаваемых сообщений используются идентификаторы на основе выборочных функций [1] или линейной свертки [2], характеризующих свойства сообщений конечной длины. Данные подходы определяют необходимость анализа алгоритмов синтеза контрольной свертки с учетом ряда научно-технических направлений. В частности, при конкретной реализации сообщений необходимо знать уровень коллизий (или обнаруживающие свойства) точечных оценок или линейной сигнатуры. Это позволяет сократить время на поиск и исправление возможных ошибок в случае непредвиденных искажений данных. С общетеоретической точки зрения необходим системный анализ свойств оценок на основе производящих функций (ПФ). Результатом таких исследований с учетом принципов формализации зависимостей является возможность выбора наиболее эффективного из алгоритмов контрольного кодирования путем сопоставления свойств кодов по ряду выбранных показателей [1]. В некоторых случаях при абонентском обмене данными на фоне шума необходимо знать теоретические уровни вероятностных параметров таких как математическое ожидание, мода и площадь под интегральной кривой плотности распределения вероятностей ошибки. Однако, применение новых методов идентификации (в части обоснования целесообразности) как правило требует весьма сложных вычислений для формирования численных значений производящих функций.

В связи с указанными обстоятельствами в данной работе рассматривается метод синтеза точечных оценок вероятности наблюдения векторов переходов заданного вида (ВПЗВ) с целью последующего интегрального сравнения свойств представляемой (частной) свертки с общеизвестными методами идентификации. Однако множество промежуточных вычислений, необходимых для решения всей задачи синтеза ПФ, приводит к возможности представления в данной статье только частных моментов решения данной проблемы. При этом число ВПЗВ в данной задаче равно $j=1$.

Разности для нижней границы вероятности пропуска ошибки

Нижняя граница для интеграла плотности распределения вероятностей пропуска ошибки для всех значений разрядности векторов $r > 1$ определяется максимальной величиной параметрической ортонормированной вероятности $\frac{3^{r-\mu}}{2m^2}$ при $r=2$, что следует из тривиальных подстановок параметров r и μ в приведенную формулу. Здесь μ это число бит перехода вида 01 в регистрируемой паре векторов.

Рассмотрим теперь разность двух объектов с учетом результатов [3], определяющих функцию правдоподобия для числа векторов переходов с $j=1$ и произвольных значений i

$$\frac{1}{2^{i+1}}\beta_i - \frac{1}{2^{i+2}}\beta_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}}\beta_{i+1} \frac{1}{\sqrt{1-4p}} \left[\left(1 + \sqrt{1-4p}\right)^{i+1} - \left(1 - \sqrt{1-4p}\right)^{i+1} \right] - \\ - \frac{1}{2^{i+2}} \frac{1}{\sqrt{1-4p}} \left[\left(1 + \sqrt{1-4p}\right)^{i+2} - \left(1 - \sqrt{1-4p}\right)^{i+2} \right]$$

Соответственно при заданном выше уровне вероятности p достаточно просто получить соотношение

$$\frac{1}{2^{i+2}}\beta_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}}\beta_i - \sqrt{\frac{9}{160}} \frac{1}{2^{i+1}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^i - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^i \right].$$

Получим частные реализации данной разности, выразив все значения для $i = 3, 4, 5$ через элементы $\frac{1}{2^{i+1}}\beta_i$, $i = 2, 3, 4$, тогда

$$\frac{1}{2^4}\beta_3 = \frac{1}{2^3}\beta_2 - \sqrt{\frac{9}{160}} \frac{1}{2^3} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2 \right], \\ \frac{1}{2^5}\beta_4 = \frac{1}{2^3}\beta_2 - \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^3 \frac{1}{2^{l+1}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^l - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^l \right], \\ \frac{1}{2^6}\beta_5 = \frac{1}{2^3}\beta_2 - \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^4 \frac{1}{2^{l+1}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^l - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^l \right].$$

Для граничного значения параметра i имеем

$$\frac{1}{2^{n-1}}\beta_{n-3} = \frac{1}{2^3}\beta_2 - \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^{n-3} \frac{1}{2^{l+1}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^l - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}}\right)^l \right].$$

Данные равенства предполагают суммирование рядов бесконечной выборки с учетом приведенных составляющих производящей функции.

Суммирование факториальных моментов в ПФ

Для первой суммы моментов в ПФ, соответствующей первой степени вероятности p запишем равенство вида

$$PF_1 = Mo + \left[\xi_1 p \left(1 + \frac{1}{2^3} \beta_2 + \frac{1}{2^4} \beta_3 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \beta_{n-3} + \frac{1}{2^{n-1}} \beta_{n-2} \right) \right]^{0,5n-np},$$

где значение $\xi_1 = 1 - p$, что следует из квадратичной формы для параметрической вероятности.

Суммирование факториальных моментов в скобках позволяет сформировать равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^3} \beta_2 + \frac{1}{2^4} \beta_3 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \beta_{n-3} + \frac{1}{2^{n-1}} \beta_{n-2} = \\ & = (n-3) \frac{1}{2^3} \beta_2 - \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^{n-3} (n-2-i) \frac{1}{2^{i+1}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i \right] + \\ & + \frac{1}{2^{n-2}} - \sqrt{\frac{8}{5}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^{n-3} - \left(1 - \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^{n-3} \right]. \end{aligned}$$

Вычислим вычитаемый элемент данного ряда преобразуя его к виду

$$(n-2) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^{n-3} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i \right] - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^{n-3} i \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i \right].$$

При этом для упрощения расчетов введем сокращение вида

$$(n-2) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=2}^{n-3} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i \right] = (n-2) \left(\frac{261}{1024} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{l=5}^{n-3} a^i \right).$$

В данном соотношении учтено, что при $i = 2, 3, 4$ точное значение вычисляемого параметра равно $\frac{261}{1024}$. Таким образом, нижний предел суммирования оказывается равным пяти, а вычитаемый элемент

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^5 = 1,259 \cdot 10^{-5}$$

для данной и более высоких степеней не учитывается.

Теперь, используя принцип суммирования арифметических прогрессий, можем записать

$$i = 2, 3, \dots, n-3, \quad (a^2 + a^3 + a^4) + a^5 + \dots + a^{n-3} + a^{n-2}$$

Соответственно получаем:

$$(n-2) \left[\frac{261}{1024} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \left(a^2 \frac{1}{1-a} - a^2 \frac{1-a^3}{1-a} \right) \right] = (n-2) \left(\frac{261}{1024} + \frac{667}{1024} \right) = \frac{928}{1024} (n-2). \quad (1)$$

Далее будем учитывать, что данное значение соответствует равенству $(1-p)(n-2)$.

Суммирование рядов вычитаемых моментов в функции правдоподобия.

Второй элемент вычитаемого в сумме моментов представляется со знаком плюс и имеет вид

$$f(i) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} i \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{8}} \right)^i \right].$$

При этом для трех первых элементов суммы имеем значение $\frac{1077}{1024}$. Остальные слагаемые вычисляем по упрощенной формуле

$$f(i) = \frac{1077}{1024} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \sum_{i=5}^{n-3} i a^i.$$

Данное соотношение позволяет записать равенство с учетом прогрессии

$$f(i) = \frac{1077}{1024} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} a \left[5a^4 + 6a^5 + \dots + (n-3)a^{n-4} \right].$$

Соответственно, используя механизм интегрирования рядов и дифференцирования суммы, имеем

$$a \left[5 \int a^4 + 6 \int a^5 + \dots + (n-3) \int a^{n-4} \right] = a (a^5 + a^6 + \dots + a^{n-3}) = \frac{a^6}{1-a}.$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{a^6}{1-a} = 6a^5 \frac{1}{1-a} + a^6 (1-a)^{-2}. \quad (2)$$

Численное значение производящей функции с учетом приведенных выше результатов (1) и (2) может быть определено по формуле

$$PF_1 = Mo + \left[\xi_1 p \left(1 + \frac{29}{32} (n-3) - \frac{928}{1024} (n-2) + \frac{1077}{1024} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{160}} \left(6a^5 \frac{1}{1-a} + a^6 (1-a)^{-2} \right) \right]^{0,5n-pn} = Mo + (0,966)^n ..$$

В приведенных вычислениях используется несуществующий момент для $i = n - 3$ что не вносит практически коррективов в полученные результаты.

Заключение

В представленной работе рассмотрены конечные разности факториальных моментов, характеризующих параметры оценок с теоретической точки зрения. Используемые алгоритмы преобразования сложных рядов позволили сформировать частный случай производящей функции, соответствующей наблюдению векторов переходов при $j = 1$.

Полученный результат, с учетом одновременного не совпадения в сумме моды и значения параметра в скобках, свидетельствует о высоких вероятностных показателях оценок при $n \gg 1$ вероятности наблюдения ВПЗВ в каналах связи.

FINITE DIFFERENCES IN THE PROBABILITY SYNTHESIS PROBLEM OF MISSING ERRORS WHEN OBSERVING VECTORS

I.P. KOBIAK

Abstract. The paper considers a technique for forming a fragment of a generating function for the probability of missing an error by the proposed new convolution method. To achieve this goal, a technique for synthesizing finite differences was applied, followed by substituting the results into

the initial equality. The main purpose of the obtained equalities is to be able to determine the numerical value of the integral area under the density curve of the probability distribution of error omission when observing transition vectors. The vectors specified by the observation system are considered in this problem as a subset of specified complex events in the set of all transition vectors.

Keywords: generating function, complex events, transition vectors, probability of missing an error, power series integral, factorial moments.

Список литературы

1. Kobayak I.P. On the boundaries of probabilistic arguments in the synthesis of linear signatures and statistical estimates. *Izvestiya vuzov. Electronics*. 2020. T. 25. No. 2. Pp. 175-182.
2. Gordon G., Nadig H. Fault localization in microprocessor systems using hexadecimal key codes. *Electronics*. 1977. No. 5. Pp. 89-96
3. Riordan J. Combinatorial identities. M. Nauka. 1982.