УДК 621.3.049.77

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МИКРОАКТУАТОРА ПО ЗАДАННЫМ ЧАСТОТАМ

Авдонюшкин Д.В., Новокшенов А.Д.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия,
avdonyushkin.dmitrij@mail.ru

Аннотация: рассмотрена задача топологической оптимизации многослойного пьезоэлектрического микроактуатора. Проектными переменными служат поля плотности несущего и пьезоэлектрического слоёв фиксированной толщины. Целевая функция минимизирует отклонения собственных частот отслеживаемых спектральных ветвей от заданных значений. Эффективный коэффициент электромеханической связи ограничен снизу. Учтены ограничения на объёмы материалов, взаимную поддержку слоёв, минимальные ширины материала и зазоров, а также отделение рабочих частот от остальной части спектра. Сформулирована связанная конечно-элементная задача и получена производная собственной частоты по проектной переменной.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, пьезоэлектрический актуатор, MEMS, собственные частоты, многослойная структура, метод конечных элементов.

I. ВВЕДЕНИЕ

Многослойный пьезоэлектрический микроактуатор описывается связанной электромеханической КЭ-моделью. Несущий слой задаёт жёсткость конструкции, а пьезоэлектрический преобразует электрическое воздействие в перемещение. Распределение материалов определяет собственные частоты и формы колебаний. Для экспериментальных AlN-актуаторов показана связь собственной формы колебаний с перемещением на единицу напряжения [1]. Поэтому частотный критерий дополнен ограничением на электромеханическую связь.

Конструкция состоит из несущего слоя, пьезоэлектрика и электродов. Толщины слоёв заданы технологией, а два независимых проектных поля определяют распределение материалов в плоскости. Подложка не входит в проектную область; её связь с устройством задаётся закреплениями в анкерных областях. Геометрия электродов фиксирована и учитывается электрическими граничными условиями.

Совместная оптимизация конструкции и размещения пьезоэлектрических актуаторов рассмотрена в [4], а настройка возбуждения и собственных форм колебаний пьезокомпозитных резонаторов - в [5]. Здесь одновременно задаются несколько собственных частот и послойные технологические ограничения.

Связанная КЭ-модель служит основой для поиска распределений материалов, обеспечивающих заданные собственные частоты и достаточную электромеханическую связь.

II. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ ПОСТАНОВКА

Используются линейные соотношения пьезоэлектричества, малые деформации и квазистатическое электрическое поле. Между слоями предполагается идеальное сцепление, электрическая инерция не учитывается. Свободные колебания описываются системой

$$\begin{bmatrix} K_{uu}(\rho) - \omega^2 M(\rho) & K_{u\varphi}(\rho) \\ K_{\varphi u}(\rho) & -K_{\varphi\varphi}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь u, φ – векторы узловых перемещений и потенциалов, а $K_{uu}, K_{\varphi\varphi}, K_{u\varphi}, K_{\varphi u}$ – механический, диэлектрический и пьезоэлектрические блоки. На поверхности без электродов задано условие $D \cdot n = 0$. При коротком замыкании разность потенциалов между электродами равна нулю. В разомкнутом режиме изолированный электрод эквипотенциален, а его суммарный свободный заряд равен нулю. Опорное значение устраняет неопределённость потенциала. В формуле (2) прежними символами обозначены матричные блоки, сформированные после наложения электрических граничных условий; матрица $K_{\varphi\varphi}$ при этом невырождена. Конденсация электрических степеней свободы даёт

$$K_{\text{eff}} = K_{uu} + K_{u\varphi} K_{\varphi\varphi}^{-1} K_{\varphi u}. \quad (2)$$

Для каждого типа электрических граничных условий формируется свой редуцированный оператор K_{eff}. В целевой функции (4) используются частоты при короткозамкнутых электродах, а разомкнутый режим необходим для вычисления коэффициента связи (5). Собственные частоты и формы колебаний

определяются из задачи $K_{\text{eff}}u_i = \omega_i^2 M u_i$. Согласованная дискретизация пьезоэлектрических блоков удовлетворяет условию взаимности $K_{\varphi u} = K_{u\varphi}^T$. Выбранный тип граничных условий не меняется в ходе оптимизации, поэтому K_{eff} и его производная вычисляются при одних и тех же условиях.

Поля ρ_s и ρ_p задают плотности материала в несущем и пьезоэлектрическом слоях. Фильтрация ограничивает минимальный пространственный масштаб, а проекция формирует дискретные маски. Для несущего слоя интерполируются упругий тензор и массовая плотность; для активного - тензоры C, e, ε и массовая плотность. Согласованная интерполяция предотвращает искусственное увеличение электромеханической связи при промежуточных плотностях [2]. Упругий, диэлектрический и пьезоэлектрический блоки имеют разные показатели штрафования.

Несущий и пьезоэлектрический слои описываются независимыми полями плотности. Поэтому один и тот же участок в плане может содержать материал в обоих слоях; конкуренции между материалами внутри одного конечного элемента нет. Вектор проектных переменных обозначен как $\rho = (\rho_s, \rho_p)$.

Для простой собственной частоты при нормировке $u_i^T M u_i = 1$ получена производная по физической элементной плотности ρ_e:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \rho_e} = \frac{u_i^T (\frac{\partial K_{\text{eff}}}{\partial \rho_e} - \omega_i^2 \frac{\partial M}{\partial \rho_e}) u_i}{2\omega_i} \tag{3}$$

Формула (3) справедлива для простой положительной собственной частоты. Производная K_{eff} содержит механический, диэлектрический и пьезоэлектрический вклады. Производная по исходной проектной переменной вычисляется цепным правилом с учётом фильтрации и проекции; для каждого слоя она определяется отдельно.

Аналитические производные проверяются направленной центральной разностью для обоих проектных полей. При сближении собственных значений используется функционал инвариантного подпространства, производная которого не зависит от выбора собственных векторов внутри кластера.

III. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Выбранные формы колебаний сопоставляются на последовательных итерациях по их корреляции или по вкладу в заданное движение. Такой подход позволяет продолжать отслеживание при сближении и пересечении собственных частот, когда их порядок в спектре изменяется. Для настройки нескольких собственных частот используется целевая функция

$$\min_{\rho_s, \rho_p} F = \sum_{i \in \mathcal{T}} w_i \left[\frac{\omega_i(\rho_s, \rho_p) - \omega_i^*}{\omega_i^*}\right]^2. \tag{4}$$

Относительное нормирование выравнивает вклад разных частот, а возведение в квадрат исключает взаимную компенсацию отклонений. Коэффициенты $w_i \geq 0$ задают приоритеты целевых частот. Множество индексов отслеживаемых спектральных ветвей и положительные целевые значения $\omega_i^* > 0$ фиксируются до начала оптимизации. Целевые частоты определяются при короткозамкнутых электродах. Такие граничные условия соответствуют питанию от источника напряжения с малым выходным сопротивлением. Целевая функция безразмерна, а её градиент вычисляется по формуле (3).

Для каждой формы колебаний с простой спектрально изолированной собственной частотой коэффициент электромеханической связи ограничен снизу:

$$k_{\text{eff},i}^2 = \frac{\omega_{\text{oc},i}^2 - \omega_{\text{sc},i}^2}{\omega_{\text{oc},i}^2} \geq k_{\min}^2. \tag{5}$$

Частоты $\omega_{\text{oc},i}, \omega_{\text{sc},i}$ соответствуют одной физической форме колебаний при разомкнутых и короткозамкнутых электродах. Частоты для этих двух электрических режимов сопоставляются по корреляции соответствующих форм колебаний, а не по их положению в отсортированном спектре. В настоящей работе мерой актуации служит коэффициент (5). Ограничение на перемещение заданной точки в заданном направлении представляет альтернативный вариант критерия и далее не рассматривается. Рабочие частоты отделены от остальной части спектра заданным минимальным интервалом [3].

Для задачи оптимизации, анкеры, контактные площадки и участки электродов заданы как неизменяемые области. Для каждой маски ограничены объём материала, минимальная ширина элементов и минимальный зазор. Для технологических процессов, не допускающих свободно расположенных участков пьезоэлектрика, условие $\rho_p \leq \rho_s$ обеспечивает опору активного слоя на

несущий. В расширенный вариант задачи могут быть добавлены ограничения на механические напряжения и напряжённость электрического поля.

Таким образом, оптимизационная постановка объединяет частотный критерий, нижнюю границу электромеханической связи, спектральное отделение рабочих частот и технологические ограничения для двух слоёв.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована задача спектральной топологической оптимизации многослойного микроактуатора на основе связанной пьезоэлектрической КЭ-модели. Получена производная простой собственной частоты с учётом механического, диэлектрического и пьезоэлектрического блоков. Заданное ограничение на коэффициент связи исключает решения с недостаточной электромеханической связью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Toledo J. et al. Design and Characterization of In-Plane Piezoelectric Microactuators // Actuators. 2017. Vol. 6, No. 2. 19. DOI: 10.3390/act6020019.

[2] Kim J. E., Kim D. S., Ma P. S., Kim Y. Y. Multi-Physics Interpolation for the Topology Optimization of Piezoelectric Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2010. Vol. 199. P. 3153-3168. DOI: 10.1016/j.cma.2010.06.021.

[3] Giannini D., Aage N., Braghin F. Topology Optimization of MEMS Resonators with Target Eigenfrequencies and Modes // European Journal of Mechanics A/Solids. 2022. Vol. 91. 104352. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104352.

[4] Molter A., Fonseca J. S. O., Fernandez L. S. Simultaneous Topology Optimization of Structure and Piezoelectric Actuators Distribution // Applied Mathematical Modelling. 2016. Vol. 40. P. 5576-5588. DOI: 10.1016/j.apm.2016.01.023.

[5] Wang X., Lin Z., Ren Y. Topology Optimization of Piezocomposite Resonator for Maximizing Excitation Strength and Synthesizing Desired Eigenmodes // Acta Mechanica Solida Sinica. 2017. Vol. 30. P. 531-539. DOI: 10.1016/j.camss.2017.10.001.

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF A MULTILAYER PIEZOELECTRIC MICROACTUATOR WITH PRESCRIBED FREQUENCIES

D.V. Avdonyushkin, A.D. Novokshenov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia,
avdonyushkin.dmitrij@mail.ru

Abstract: a density-based topology optimization formulation is proposed for a multilayer piezoelectric microactuator. Independent design fields describe the supporting and piezoelectric layer masks at prescribed thicknesses. The objective matches selected natural frequencies to target values. A lower bound on the modal electromechanical coupling coefficient prevents solutions with insufficient electromechanical coupling. Constraints cover material fractions, layer support, minimum feature size, target-mode identification, and separation from spurious modes.

Keywords: topology optimization, piezoelectric actuator, MEMS, natural frequencies, multilayer structure, finite element method.