УДК 538.945

# КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ СЛОИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР СВЕРХПРОВОДНИК/ФЕРРОМАГНЕТИК

Кушнир В.Н.[1,2], Прищепа С.Л.[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, vnkushnir@gmail.com

[2]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

Аннотация: в данной работе представлен матричный метод анализа критического состояния сверхпроводимости периодических слоистых структур сверхпроводника/ферромагнетик, основанный на явном решении линеаризованных одномерных уравнений Узаделя. На основе данного метода рассчитаны критические температуры системы $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ в зависимости от толщин слоев сверхпроводника и ферромагнетика. Исследовано поведение мультипликаторов системы уравнений Узаделя в зависимости от температуры.

Ключевые слова: уравнения Узаделя, матрица монодромии, ноль и пи-состояния.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Антагонизм сверхпроводящего и ферромагнитного упорядочений порождает многочисленные эффекты, которые были предсказаны и обнаружены на экспериментах с наноструктурами сверхпроводник(S)/ферромагнетик(F) – например, существование сверхпроводящего конденсата в пи-состоянии и генерация в нем триплетных состояний, спин-вентильный эффект [1,2]. Названные эффекты реализуются (или могут быть реализованы) в устройствах сверхпроводниковой наноэлектроники и спинтроники [3–5]. Дополнительные перспективы связаны с периодическими S/F структурами, например, для их применения в устройствах «магноники» [6].

В данной работе предлагается метод расчета критических температур, $T_c$, сверхпроводящего состояния в периодических S/F структурах в зависимости от их материальных и геометрических параметров, основанный на обнаруженном нами ранее явном общем решении линеаризованных одномерных уравнений диффузионного предела микроскопической теории сверхпроводимости для узаделевских функций Грина [2,7,8]. Проблема критического состояния периодических S/F структур впервые была исследована систематически в классической работе [9] на основе преобразования Фурье – данный метод является асимптотически точным (хотя, ввиду наличия интерфейсов, медленно сходящимся). Впоследствии данная проблема рассматривалась неоднократно на основе приближенных методов, а также, и асимптотически точных (см. работу [10] и список литературы в ней). Нами используется ортодоксальный подход, тот же, что и в [2,7,8]; он является более простым по сути, коль скоро основан на явном решении уравнений теории, и позволяет внести некоторые дополнения в теорию, изложенную в работе [9] (в частности, выявить суть «кроссовера» состояний сверхпроводимости с позиции теории систем с периодическим изменением параметров).

Компьютерное моделирование приведенных в данной работе критических характеристик выполнено с экспериментальными значениями параметров S/F структур системы $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ (в [9] анализировалась система V/Fe).

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД

Рассматривается периодическая структура, образованная повторением «элементарной ячейки» F/S/F с толщинами S- и F-слоев $d_S$ и $d_F/2$, соответственно, так что период структуры $d = d_S + d_F$. Полагаем, что выполняются условия применимости формализма диффузионного предела микроскопической теории сверхпроводимости, что вполне приемлемо для большей части практически значимых экспериментальных структур. В этом формализме S/F система задана 6-ю параметрами: критической температурой S-материала $T_S$, длинами когерентности $\xi_S$ и $\xi_F$, величиной обменной энергии в ферромагнетике $E_{ex}$, и параметрами S-F интерфейса – отношением нормальных низкотемпературных удельных сопротивлений S- и F-слоев $\rho_S/\rho_F$, и, наконец, параметром прозрачности Тагирова $t_n$ [2]. Для системы $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ названные параметры найдены ранее с высокой степенью точности [2], что определило здесь ее выбор как объекта для численных расчетов. Далее, в используемом формализме характеристики сверхпроводящего конденсата полностью определяются синглетной и триплетными составляющими комплексной узаделевской аномальной функцией Грина, индексированными мацубаровскими частотами, принимающими дискретные значения и ограниченными частотой Дебая.

При этом следует учесть, что выбор F/S/F в качестве периода структуры одновременно означает, что F-слои являются монодоменными с сонаправленными магнитными моментами; в таком случае триплетная составляющая аномальной функции Грина редуцируется к одной компоненте, соответствующей проекции спина ноль.

В общем случае узаделевские функции Грина являются решением системы нелинейных уравнений в частных производных, но критическое состояние сверхпроводимости описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ). Коль скоро нами найден полный набор фундаментальных решений этой системы ЛОДУ [2,8,9], то ее общее решение удобнее всего строить через матрицант $\mathbf{R}(x, x_0) \equiv \mathbf{R}(x)$ (матрица, образованная фундаментальными решениями и их производными), где ось *OX* направлена ортогонально поверхности слоев, а начало системы координат помещено в середину F-слоя. Тогда вектор-функция критического состояния $\mathbf{Y}(x)$, образованная мацубаровскими компонентами синглетной и триплетной составляющих узаделевской функции Грина и их производными, выразится формулой $\mathbf{Y}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{Y}(0)$. Далее, поскольку рассматривается система уравнений с периодическими коэффициентами, то, в соответствии с теоремой Флоке – Ляпунова, приходим к стандартной задаче на собственные векторы $\mathbf{Y}(0)$ и собственные значения $\mu$ (*мультипликаторы*) для матрицы монодромии $\mathbf{R}(d)$, $\mathbf{R}(d)\mathbf{Y}(0) = \mu\mathbf{Y}(0)$, определяемые из характеристического уравнения $\det(\mathbf{R}(d) - \mu\,\mathbf{1}) = 0$. По требованию ограниченности узаделевских функций Грина требуем существования значений корней характеристического уравнения, по модулю равных единице, $|\mu(T)| = 1$ (иначе говоря, все корни должны лежать на единичной окружности в комплексной плоскости). Данное требование удовлетворяется для некоторого интервала температур, при этом, правая граница этого интервала и есть критическая температура $T_c$. Помимо расчета $T_c$, мы решаем задачу о зависимости $\mu(T)$ во всем диапазоне температур $(0, T_c]$, что дает дополнительную информацию о сверхпроводящей системе.

## III. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В соответствии с многочисленными вычислениями в периодической S/F структуре могут быть реализованы лишь т.н. 0-, или $\pi$- критические состояния с критическими температурами $T_0$ и $T_\pi$, соответственно, за исключением окрестностей точек кроссовера. Точкой кроссовера, $d_{cr}$, называют точку пересечения кривых $T_0(d_F)$ и $T_\pi(d_F)$. Заметим, что формальное доказательство данного свойства в литературе не приведено. Заметим также, что в специальных случаях возможна реализация т.н. $\varphi$-состояния. В наших терминах 0- и $\pi$-состоянию соответствуют мультипликаторы $\mu$ = 1 и $\mu$ = –1, при этом, параметр порядка для 0-состояния – *d*-периодическая функция без нулей, для пи-состояния – 2*d*-периодическая функция с нулем в каждом периоде. На рисунке 1a показаны эти зависимости, рассчитанные для структуры Nb/$Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ при нескольких толщинах $d_S$, а на рисунке 1 – они же в области кроссовера для значения $d_S$= 26 нм вместе с критической температурой $T_c(d_F)$.

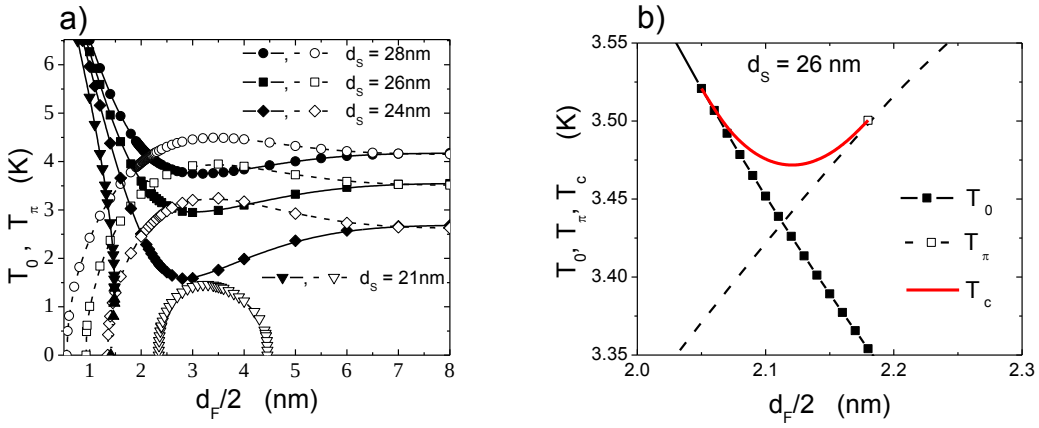



Рисунок 1. a) Зависимости критических температур 0- и $\pi$-состояний сверхпроводимости от толщины ферромагнитного слоя (линии со сплошными и штриховые линии с открытыми символами, соответственно) для периодической структуры с элементарной ячейкой $Pd_{0.81}Ni_{0.19}(d_F/2)/Nb(d_S)/Pd_{0.81}Ni_{0.19}(d_F/2)$. b) Те же зависимости для толщины $d_S$ = 26 нм вместе с критической температурой $T_c(d_F)$ (красная линия) в окрестности точки кроссовера

Сравнивая зависимости, рассчитанные здесь для структуры с разреженным ферромагнетиком, с полученными в работе [9], равно как и с характеристиками, представленными в литературе после выхода работы [9], видим, что все они однотипны. В частности, существует минимальная толщина S-слоя, ниже которой наблюдается эффект исчезновения и возврата сверхпроводимости (см. кривые для

толщины $d_S$ = 21 нм). С количественной точки зрения, полученные теоретические характеристики, будучи точными, имеют большое значение для эксперимента. Второй аспект, который необходимо отметить, возникает в силу рассчитанных здесь зависимостей мультипликаторов $\mu$ от температуры и от толщин слоев. Результаты, вполне тривиальные с позиции теории уравнений с периодическими коэффициентами, можно суммировать следующим образом: для любых пар значений ($T$, $d_F$) из области между кривыми $T_0(d_F)$ и $T_\pi(d_F)$ вне кроссовера, и между кривыми $T_c(d_F)$ и $T_{0(\pi)}(d_F)$ в области кроссовера, решения одномерных линеаризованных уравнений Узаделя для периодических структур ограничены. На первый взгляд, отмеченный аспект выглядит довольно схоластично, поскольку определенные таким образом «виртуальные состояния» являются метастабильными (для $T < T_c$ параметр порядка не является бесконечно малым). Тем не менее, оставляя развитие этой темы для следующей работы, отметим возможность проявления означенных «виртуальных состояний» на переходных резистивных характеристиках (см. [8]).

Теперь обратим внимание на поведение мультипликаторов в окрестностях кроссоверов, то есть, интервалах переходов сверхпроводящего состояния с ветви $T_0(d_F)$ на $T_\pi(d_F)$ и наоборот. Они определены как интервал $I_{cr}$ значений $d_F$, при прохождении которого величина $\mu$ изменяется от 1 до –1 (или наоборот). Новое понимание кроссовера возникает, как только мы рассмотрим «эволюцию» мультипликаторов с увеличением $T$ при фиксированном $d_F \in I_{cr}$. Рисунок 2 отражает это изменение на пяти графиках положения мультипликаторов на единичной окружности в комплексной плоскости.

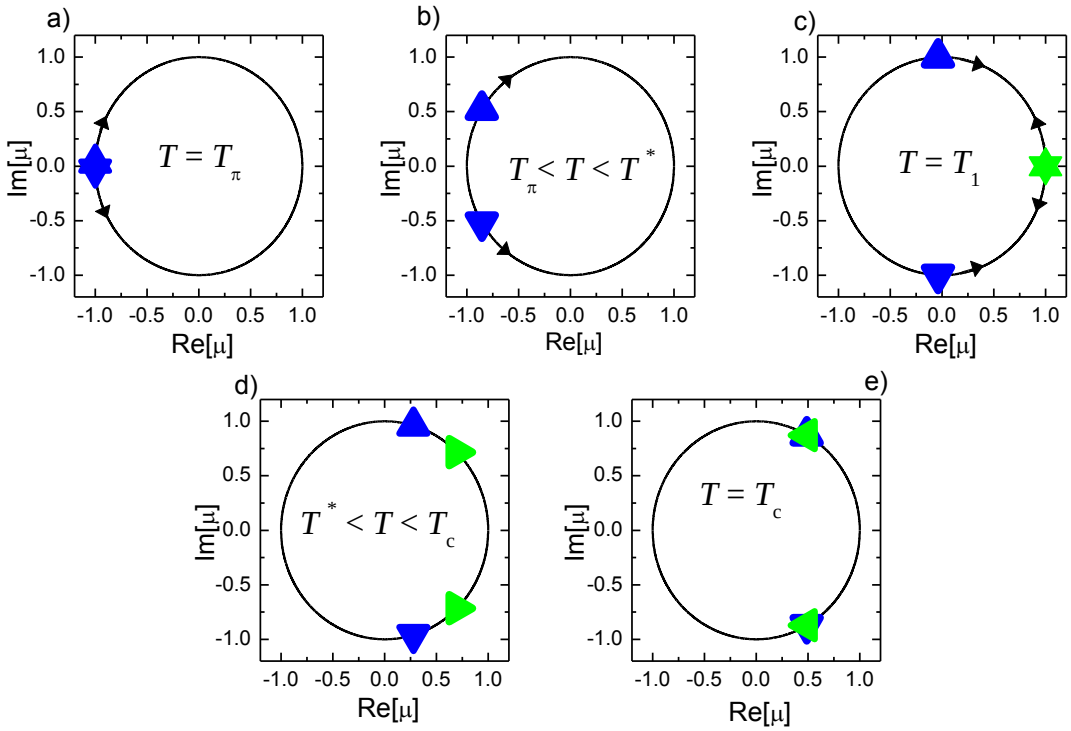



Рисунок 2. Эволюция корней характеристического уравнения для матрицы монодромии уравнений критического состояния сверхпроводимости при увеличении температуры от $T_\pi$ до $T_c$. Стрелками указано направление движения корней

Начальной точке с $T = T_\pi(d_F < d_{cr})$ соответствует корень характеристического уравнения $\mu = -1$ (рис. 4a). При увеличении температуры два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения расходятся (рис. 4b), двигаясь по единичной окружности в комплексной плоскости вплоть до точек $\mathrm{Re}[\mu_1] \pm \mathrm{Im}[\mu_1]$, заданных некоторой характерной температурой $T_1$ (рис. 4c). При этом значении $T$ возникают, как видим, еще два корня в точке 0-состояния, то есть, происходит вырождение. Далее, при возрастании температуры от $T_1$ до критической $T_c$ две пары корней движутся по верхней и нижней ветви окружности в комплексной плоскости навстречу друг другу (рис. 4d). Критическому состоянию с температурой $T_c$ соответствует их слияние в пару $\mathrm{Re}[\mu_c] \pm \mathrm{Im}[\mu_c]$ с критическим значением $\mu_c$ (рис. 4e).

## III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами представлен метод расчета характеристик критического состояния сверхпроводимости периодических структур сверхпроводник/ферромагнетик в диффузионном пределе микроскопической теории, обладающий следующими преимуществами. Во-первых, он является

точным, что обусловлено существованием явной формы общего решения системы линеаризованных одномерных уравнений Узаделя (в этом смысле данную систему можно отнести к «специальному виду»). Во-вторых, с точки зрения компьютерных вычислений он является простым, поскольку периодическая структура представлена «элементарной ячейкой». В-третьих, развитие метода предопределено существованием развитой теории уравнений с периодическими коэффициентами.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнялась при финансовой поддержке по проекту ГПНИ «Современное материаловедение, перспективные материалы и новые технологии» (2026–2030).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Buzdin, A. I. Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures / A. I. Buzdin // Reviews of Modern Physics. 2005. Vol. 77, No 3. P. 935–976. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.935.

[2] Кушнир, В. Н. Сверхпроводимость слоистых структур / В. Н. Кушнир. Минск: БНТУ, 2010.

[3] Golubov, A. A. The current-phase relation in Josephson junctions / A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev // Reviews of Modern Physics. 2004. Vol. 76, No 2. P. 411–469. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.411.

[4] Kushnir, V. N. Basic superconducting spin valves / V. N. Kushnir, A. Sidorenko, L. R. Tagirov, M. Yu. Kupriyanov // Functional nanostructures and metamaterials for superconducting spintronics. From superconducting qubits to self-organized nanostructures. Springer series NanoScience and Technology; ed.: A. Sidorenko. Springer Int. Pub. AG, part of Springer Nature. 2018. P. 1–29. https://doi.org/10.1007/978-3-319-90481-8_1.

[5] Tagirov, L. R. Superconducting triplet proximity and Josephson spin valves / L. R. Tagirov, M. Yu. Kupriyanov, V. N. Kushnir, A. Sidorenko // Functional nanostructures and metamaterials for superconducting spintronics. From superconducting qubits to self-organized nanostructures. Springer series NanoScience and Technology; ed.: A. Sidorenko. Springer Int. Pub. AG, part of Springer Nature. 2018. P. 31–47. https://doi.org/10.1007/978-3-319-90481-8_2.

[6] Ferromagnet/Superconductor Hybrid Magnonic Metamaterials / I. A. Golovchanskiy [et al.] // Advanced Science. 2019. Vol. 6. P. 1900435-1–8. https://doi.org/10.1002/advs.201900435.

[7] Кушнир, В. Н. Критическая температура многослойных наноструктур сверхпроводник/ферромагнетик / В.Н. Кушнир // Доклады БГУИР. 2007. Т. 5, № 4. С. 48–57. https://libeldoc.bsuir.by/handle/123456789/31283.

[8] Kushnir, V. N. Multiple order parameter configurations in superconductor/ferromagnet multilayers / V. N. Kushnir [et al.] // Physical Review B. 2011. Vol. 84. P. 214512-1–10. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.214512.

[9] Radović, Z. Transition temperatures of superconductor-ferromagnet superlattices / Z. Radović [et al.] // Physical Review B. 1991. Vol. 44, No 2. P. 759–764. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.44.759.

[10] Бакурский, С. В. Эффект близости в многослойных структурах с чередующимися ферромагнитными и нормальными слоями / С. В. Бакурский [и др.] // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 102, № 9. С. 670 – 677. https://doi.org/10.7868/S0370274X15210043.

## CRITICAL STATES OF LAYERED PERIODIC SUPERCONDUCTOR/FERROMAGNET STRUCTURES

V.N. Kushnir[1,2], S.L. Prischepa[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, vnkushnir@gmail.com

[2]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Abstract: the matrix method for analyzing the superconducting critical state of periodic superconductor/ferromagnet structures, which based on the explicit solution of linearized one-dimensional Usadel equations, has presented. On the base of this method, the critical temperatures of the Nb/ $Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ system were calculated as functions of the superconductor and ferromagnet layer thicknesses. The temperature dependence of the characteristic multipliers of the system of Usadel equations has investigated.

Keywords: usadel equations, monodromy matrix, zero and pi states.