УДК 514.76

ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Можей Наталья Павловна
К.ф.-м.н., доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий» УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 220013, Республика Беларусь, г. Минск, ул. П. Бровки, д.6

Аннотация

Объектом исследования работы являются геометрические структуры на однородных пространствах, рассматриваются почти симплектические связности и соответствующие им тензоры Риччи. Приведены основные понятия в области почти симплектических и симметрических однородных пространств, инвариантных связностей, а также тензорного анализа (тензоры кручения, кривизны и тензоры Риччи). В работе получены в явном виде тензоры Риччи для нетривиальных четырехмерных симметрических однородных пространств с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором

Ключевые слова

Симметрическое пространство, почти симплектическая структура, симплектическая связность, тензор Риччи

Тензор Риччи является фундаментальной характеристикой кривизны многообразия, он допускает обобщение на многообразия, не обладающие метрикой, и обладает рядом свойств, отличных риманова случая. В данной работе используется классификация четырехмерных нетривиальных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором над полем $\mathbb{R}$, представленная в статье [1], а также введенная там система обозначений. Целью настоящего исследования является аналитическое нахождение тензоров Риччи на данных типах пространств.

Пусть $(\overline{G}, M)$ – четырехмерное однородное пространство, где $\overline{G}$ – группа Ли на многообразии M, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$, $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\overline{\mathfrak{g}}$, соответствующая G. Обозначим $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры и Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным [2]. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x) y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y) x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ –

вид $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \big[\Lambda(x), \Lambda(y)\big] - \Lambda(\big[x, y\big])$ для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$, а тензор Риччи Ric, соответственно, вид $Ric(y,z)=tr\{x \mapsto R(x,y)z\}$. Если однородное пространство является *симметрическим*, то в некотором базисе $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Пространство $B(\mathfrak{m})$ билинейных форм на $\mathfrak{m}$ становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить $(x.b)(v_1,v_2) = -b(x.v_1,v_2) - b(v_1,x.v_2)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$, $b \in B(\mathfrak{m})$. *Почти симплектической структурой на* $\mathfrak{g}$*-модуле* $\mathfrak{m}$ называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b \in B(\mathfrak{m})$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Аффинная связность без кручения называется *почти симплектической*, если она равна нулю на 2-форме.

Опишем пару $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, где $\{e_1,...,e_n\}$ – базис $\overline{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \overline{\mathfrak{g}}$), $\{e_1,...,e_{n-4}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1 = e_{n-3}, u_2 = e_{n-2}, u_3 = e_{n-1}, u_4 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. В дальнейшем используется нумерация подалгебр, приведенная в [1]. Поскольку ограничение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление $\mathfrak{g}$, связность можно описывать значениями $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, $\Lambda(u_4)$, далее предполагается, что $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $s_{i,j} \in \mathbb{R}$ при $i, j = \overline{1,4}$.

Классификация нетривиальных вещественных форм симметрических пар $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором приведена в [1], результат классификации тензоров Риччи для пар, отличных от комплексного случая, представлен в следующей теореме:

Теорема. *Вещественные формы нетривиальных четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, задаваемые парами* $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$*, такими, что* $\mathfrak{g}$ *неразрешима, локально эквивалентны одной из следующих:*

4.10.7	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0 ,
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	$-u_2$	0	0	e_3	0	0

4.11.4	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0	0	$2e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	$-2e_2$	0	0

,

4.11.5	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0	0	$-2e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	$2e_2$	0	0

,

6.3.4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$-2e_5$	$-e_4$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-4e_5$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$2e_5$	0	0	e_2
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	e_4	$4e_5$	$-e_2$	0

.

Тензоры кривизны почти симплектических связностей (без кручения) на указанных пространствах имеют вид, приведенный в таблице 1.

Таблица 1

Тензоры Риччи почти симплектических связностей

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$	Тензор Риччи почти симплектической связности	Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$	Тензор Риччи почти симплектической связности
4.10.7	$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	4.11.4	$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix}$
6.3.4	$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$	4.11.5	$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\\0&2&0&0\end{pmatrix}$

Выпишем для вещественных форм нетривиальных четырехмерных симметричес-ких однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектичес-кой структурой и неразрешимым стабилизатором аффинные связности, найдем тензоры Риччи и укажем, при каких условиях связность является симплектической.

В случае 4.10.7 инвариантная аффинная связность имеет следующий вид:

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&p_{1,4}\\0&0&p_{2,3}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&q_{2,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-p_{2,3}&0&0&0\\0&0&0&p_{1,4}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_4)=\begin{pmatrix}s_{3,3}&0&0&0\\0&s_{4,4}-q_{2,4}&0&s_{2,4}\\0&0&s_{3,3}&0\\0&0&0&s_{4,4}\end{pmatrix}.$$

Тогда тензор Риччи

$$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2p_{1,4}s_{3,3}+2p_{1,4}s_{4,4}+{q_{2,4}}^2+1\end{pmatrix}.$$

Связность, сохраняющую симплектическую форму, получим при $p_{23}=p_{14}$, $s_{33}=0$, $q_{24}=2s_{44}$. Тензор кручения $T=0$ при $p_{1,4}=s_{3,3}, p_{2,3}=0, s_{4,4}=2q_{2,4}$. Тогда

тензор Риччи для связности без кручения, сохраняющей симплектическую форму, примет вид, приведенный в теореме.

В случае 6.3.4 аффинная связность

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&p_{1,4}\\0&0&s_{3,3}-s_{2,2}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-s_{2,2}+s_{3,3}+p_{1,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\s_{2,2}-s_{3,3}&0&0&0\\0&0&0&p_{1,4}\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_4)=\begin{pmatrix}s_{3,3}&0&0&0\\0&s_{2,2}&0&s_{2,4}\\0&0&s_{3,3}&0\\0&0&0&s_{3,3}+p_{1,4}\end{pmatrix}.$$

Тогда тензор Риччи имеет вид

$$Ric=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3p_{1,4}{}^2-2p_{1,4}s_{2,2}+2p_{1,4}s_{3,3}+s_{2,2}{}^2-2s_{2,2}s_{3,3}+s_{3,3}{}^2+6\end{pmatrix}.$$

Связность, сохраняющую симплектическую форму, получим при $s_{22}=-p_{14}$, $s_{33}=0$. Тензор кручения $T=0$ при $s_{22}=p_{14}=s_{33}$. Тензор Риччи для связности без кручения, сохраняющей симплектическую форму, примет вид, приведенный в теореме.

В случаях 4.11.4 и 4.11.5 инвариантная аффинная связность нулевая, связность единственная и является почти симплектической, а тензоры Риччи имеют вид, приведенный в теореме.

Вывод: в результате работы получены и выписаны в явном виде тензоры Риччи для нетривиальных четырехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимым стабилизатором, наделенных почти симплектической структурой (над полем $\mathbb{R}$).

Список использованной литературы

1. Можей Н. П. Вещественные формы четырехмерных симметрических пространств с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2: Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2025. Т. 15, № 3. С. 6–17.

2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // American Journal of Mathematics. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.