УДК 532. 5. 011. 12

С.С. КАЯНОВИЧ

РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Минский государственный высший радиотехнический колледж

(Поступила в редакцию 2014)

Введение. В работе [1] дается систематическое изложение вопросов разрешимости краевых задач для уравнений Навье – Стокса, описывающих движение вязких несжимаемых жидкостей. При этом в разделе «Добавление» отмечается, что вопрос о том, имеет ли место однозначная разрешимость «в целом» начально-краевой задачи для этих уравнений, остается открытым. Ввиду такого положения дел в работе [2] было предложено для описания течений вязкой жидкости брать модифицированные уравнения, которые содержат слагаемые с малым положительным коэффициентом ε, отсутствующие в уравнениях Навье – Стокса.

В связи с тем, что для модифицированных уравнений теорема существования решения имеет место, в [3] исследовалась разностная схема для этих уравнений. Однако рассматриваемая там схема не содержала градиента давления. В [4] рассматривались разностные схемы для классических уравнений и при этом исследования проводились в переменных скорость-давление.

Первой работой по исследованию разрешимости модели, рассматриваемой в настоящей статье, была работа [5]. Однако исследования, проведенные в ней, были выполнены при жестких предположениях относительно поведения искомых функций на границе области поиска решения, что сильно умаляло полученный результат. Это заставило обратить более пристальное внимание на граничные условия ([6] – [8]) и привело к работе [9].

Из названия работы [2] следует вывод о том, что основная трудность исследования разрешимости модели Навье – Стокса связана с большими градиентами скоростей, которые имеют место у границ с условиями прилипания. Поэтому в работах [5] – [9] акцент приходится на граничные условия. В работах же, которые выходили в свет параллельно с указанными, акцент переносился на переменную по времени или же рассматривалось течение сжимаемой жидкости. Так, например, в [10] исследуется решение начальной задачи (задачи Коши), в [11] изучается поведение решений во времени при начальном условии из пространства Соболева, в [12], [13] рассматриваются сжимаемые жидкости.

В данной работе проводится исследование разрешимости уравнений работы [9] без предположений работы [5]. Производная по времени, которая присутствует в уравнении количества движения, заменяется разностной производной, как это делается в методе Ротэ [14], и это уравнение становится дифференциально-разностным. В этой дифференциально-разностной модели на каждом из полученных временных слоев уравнение количества движения теперь является уравнением эллиптического типа, для которого справедлива теорема Шаудера [15,16], позволяющая доказать разрешимость.

Рассматриваемая система уравнений описывает течения, в которых поперечная компонента скорости и ее производная в поперечном направлении не равны тождественно нулю [9]. Область течения, в которой эта производная отрицательна, называется стержнем течения, а само течение – стержневым. Следует отметить, что решение системы, рассматриваемой в [9], если оно существует, удовлетворяет всем уравнениям модели Навье – Стокса.

Постановка задачи. Примем нижеследующие обозначения $x=(x_1,x_2)$, $0\le x_1\le L$, $0\le x_2\le H$, $0\le t\le T$, $\Omega=(0,L)\times(0,H)$,
$S_1=[0\le x_1\le L, x_2=0]$, $S_2=[0\le x_1\le L, x_2=H]$, $S_3=[x_1=0, 0\le x_2\le H]$, $S_4=[x_1=L, 0\le x_2\le H]$. $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$ – граница Ω , $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$,

$\Omega_T=\Omega\times(0,T]$, $S_T=S\times[0,T], \overline{\Omega}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]$,

и рассмотрим задачу (плотность $\rho=1$)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{2}u_k\frac{\partial u_1}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_1} \quad , \qquad (x,t)\in\Omega_T \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0 \quad , \qquad x\in[0,L]\times(0,H) \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0 \quad , \qquad x\in\Omega \tag{3}$$

$$u_1\big|_{t=0}=\bar{b}(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$\bar{b}\big|_{S_1\cup S_2}=0 \ , \tag{5}$$

$$u_2\big|_{S_1\cup S_2}=0 \ , \tag{6}$$

$$\int_0^H\frac{\partial\bar{b}(x_1,z)}{\partial x_1}dz=0\,, \qquad 0\le x_1\le L, \tag{7}$$

краевые условия для (1) и (3) определяются ниже.

При $t=0$ функция $u_1(x,0)=\bar{b}(x)$ задана. Найдем при $t=0$ функцию u_2, решая (2) с граничным условием $u_2\big|_{S_1}=0 \quad (0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 \le H)$,

$$u_2(x_1,x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz \,.$$

Отметим, что условие $u_2\big|_{S_2}=0$ выполняется автоматически, т.к.

$$u_2(x_1,H) = -\int_0^{H} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = -\int_0^{H} \frac{\partial \bar{b}(x_1,z)}{\partial x_1} dz = 0$$

в силу (7).

Для нахождения функций $p(x,t), 0 \le t \le T$ и $u_1(x,t), 0 < t \le T$ потребуются дополнительные обозначения, определения и рисунок 1, на котором изображен канал и обозначены некоторые участки границ.

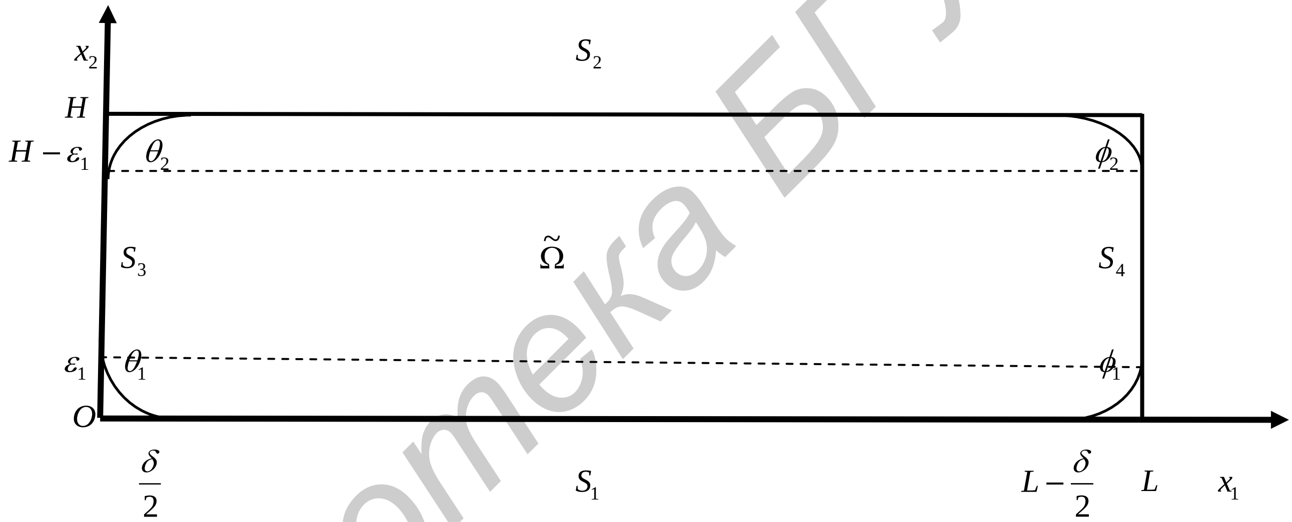

Рис. 1

Пусть $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой $\tilde{S}$, $\bar{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega} \cup \tilde{S}$, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4$,

где $\tilde{S}_1 = [0 \le x_1 \le \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1)] \cup [\frac{\delta}{2} \le x_1 \le L - \frac{\delta}{2}, x_2 = 0] \cup [L - \frac{\delta}{2} \le x_1 \le L, x_2 = \phi_1(x_1)]$,

$\tilde{S}_2 = [0 \le x_1 \le \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1)] \cup [\frac{\delta}{2} \le x_1 \le L - \frac{\delta}{2}, x_2 = H] \cup [L - \frac{\delta}{2} \le x_1 \le L, x_2 = \phi_2(x_1)]$,

$\tilde{S}_3 = [x_1 = 0, \theta_1(0) \le x_2 \le \theta_2(0)]$, $\quad \tilde{S}_4 = [x_1 = L, \phi_1(L) \le x_2 \le \phi_2(L)]$,

$\Omega_1 = [0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 \le \varepsilon]$, $\qquad \Omega_2 = [0 \le x_1 \le L, H - \varepsilon \le x_2 < H]$,

$\Omega' = [0 \le x_1 \le L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$, $\qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$,

$S_1' = [0 \le x_1 \le L, x_2 = \varepsilon_1]$, $\qquad S_2' = [0 \le x_1 \le L, x_2 = H - \varepsilon_1]$,

$\theta_i(x_1), \phi_i(x_1), (i = 1,2)$ – строго монотонные функции.

Пусть, кроме того,

$$\theta_1(0)=\phi_1(L)=\varepsilon_1,\quad \theta_2(0)=\phi_2(L)=H-\varepsilon_1,\quad \theta_1(\frac{\delta}{2})=\phi_1(L-\frac{\delta}{2})=0,\quad \theta_2(\frac{\delta}{2})=\phi_2(L-\frac{\delta}{2})=H.$$

Считаем, что θ_2 симметрична θ_1, а ϕ_2 – ϕ_1 относительно прямой $x_2=\frac{H}{2}$. Таким образом, области $\overline{\Omega},\overline{\tilde{\Omega}}$ симметричны относительно той же прямой $x_2=\frac{H}{2}$. Здесь ε,δ – малые положительные числа, $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\tilde{\Omega}_T=\tilde{\Omega}\times[0,T],\quad \tilde{S}_T=\tilde{S}\times[0,T],\quad \overline{\tilde{\Omega}}_T=\overline{\tilde{\Omega}}\times[0,T].$

Будем говорить, что функция $g(x,t)$, определенная на $\overline{\tilde{\Omega}}_T$, является четной (нечетной) по x_2, если при любых $0\le x_1\le L, 0\le t\le T$ имеет место равенство

$$g(x_1,\tilde{S}_2(x_1)-x_2,t)=g(x_1,\tilde{S}_1(x_1)+x_2,t)\qquad (g(x_1,\tilde{S}_2(x_1)-x_2,t)=-g(x_1,\tilde{S}_1(x_1)+x_2,t)),\tag{8}$$

где $0\le x_2\le\frac{\tilde{S}_2(x_1)-\tilde{S}_1(x_1)}{2}$. Аналогично определяется четность (нечетность) функции, заданной на $\overline{\Omega}_T$.

Будем говорить, что функция $g(s,t)$, определенная на $\tilde{S}_T$, является четной (нечетной) по x_2, если при любых $0\le x_1\le L, 0\le t\le T$ имеет место равенство (8), в котором $x_2=0$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется срезающая функция, которую определим так:

$$\zeta(x)=1,\ \text{если}\quad \delta\le x_1\le L-\delta,\quad 0\le x_2\le H,$$

$$0\le\zeta(x)\le 1,\ \text{если}\ [\frac{\delta}{2}\le x_1\le\delta]\cup[L-\delta\le x_1\le L-\frac{\delta}{2}],\quad 0\le x_2\le H,\tag{9}$$

$$\zeta(x)=0,\ \text{если}\ [0\le x_1\le\frac{\delta}{2}]\cup[L-\frac{\delta}{2}\le x_1\le L],\ [\theta_1(x_1)\le x_2\le\theta_2(x_1)]\cup[\phi_1(x_1)\le x_2\le\phi_2(x_1)].$$

где $x=(x_1,x_2)$, ζ – функция, четная по x_2.

Будем предполагать, что $\zeta(x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$, $\bar{b}(x)\in C_{l,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}}), \tilde{S}\in C_{l,\alpha}$ и $\bar{b}(x)$ – функция, четная по x_2. Тогда функция u_2, найденная выше при $t=0$, будет удовлетворять условию $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\in C_{l-1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$ и будет нечетной по x_2.

Здесь $l\ge 3,\alpha\in(0,1)$, а классы функций $C_{l,\alpha}(\overline{\Omega}),C_{l,\alpha}(S)$ и смысл принадлежности $S\in C_{l,\alpha}$ определены в [15].

Зная функции u_1,u_2, рассмотрим (3) с условием $(t=0)$

$$\frac{\partial p}{\partial\bar{n}}\Big|_{\tilde{S}}=\zeta(s)\sum_{j=1}^{2}\omega_j(s)\cos\alpha_j,\qquad s\in\tilde{S},$$

где $\frac{\partial p}{\partial\bar{n}}\Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внутренней нормали к $\tilde{S}$, α_i – угол между вектором $\bar{n}$ и осью Ox_i,

$$\omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Условие разрешимости

$$\int_{\tilde{S}} \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos\alpha_j ds = 0$$

для этой задачи выполняется в силу (9) и нечетности функции u_2 по x_2, при этом ее решение определено с точностью до произвольной постоянной [17] и принадлежит классу $C_{l-1,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$ [15]. Итак, при $t=0$ найдены все три функции u_1, u_2, p. Для их нахождения при $t>0$ будем применять метод Ротэ [14].

Метод Ротэ. Будем вычислять приближенные решения рассматриваемой задачи методом Ротэ. Разобьем пространство (x,t) плоскостями $t_m = m\tau, m = 0,1,2,..., M,$ на слои и предположим, ради сокращения записи, что $M\tau = T.$ Пусть $\tilde{\Omega}_m$ есть сечение $\tilde{\Omega}_T$ плоскостью $t_m = m\tau, \tilde{S}_m$ – его граница, $\bar{\tilde{\Omega}}_m = \tilde{\Omega}_m \cup \tilde{S}_m.$

На каждом слое $\tilde{\Omega}_m$ определим функции, которые будем обозначать $u_{1,m}, u_{2,m}, p_m, m = \overline{0,M}.$ Выше было найдено решение при $t=0,$ т.е. решение $u_{1,0}, u_{2,0}, p_0.$ Для нахождения функции u_1 на слоях $\tilde{\Omega}_m$ полагаем

$$u_1\big|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t), \quad (s,t) \in \tilde{S}_T, \text{ где } \quad \tilde{\psi}_1(s,t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T), \quad \tilde{\psi}_1\big|_{t=0} = \bar{b}(s), \quad x = s \in \tilde{S},$$

$$\tilde{\psi}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\delta}{2} \le x_1 \le L - \frac{\delta}{2}, \qquad [x_2 = 0] \cup [x_2 = H], \quad t \in [0,T],$$

и преобразуем задачу для u_1 в задачу с нулевым граничным условием. Вводя в рассмотрение функцию $f(x,t),$ удовлетворяющую при любом $t \in [0,T]$ условию

$$f\big|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1\big|_{\tilde{S}_T},$$

и новую искомую функцию $w(x,t),$ удовлетворяющую равенству $u_1(x,t) = w(x,t) + f(x,t)$, для $w(x,t)$ получаем задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + (w+f)\frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} w + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + F(x,t) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \tag{10}$$

$$w\big|_{\tilde{S}_T} = 0, \tag{11}$$

$$w\big|_{t=0} = \bar{b}(x) - f\big|_{t=0}, x \in \bar{\tilde{\Omega}}, \tag{12}$$

$$\bar{b}(x) - f\big|_{t=0} = 0, x = s \in \tilde{S}, \tag{13}$$

где
$$F(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + f \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Вводя обозначения $g_{\bar t}(x,t_m)=\frac{1}{\tau}(g_m-\check{g}_m)$, $g_m=g(x,t_m), \check{g}_m=g(x,t_{m-1})$, полагая $w_m=u_{1,m}-f_m$ и заменяя $\frac{\partial w}{\partial t}$ на разностную производную $w_{\bar t}(x,t_m)$, запишем уравнение (10) в виде

$$\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2}-(\check{w}_m+f_m)\frac{\partial w_m}{\partial x_1}-\check{u}_{2,m}\frac{\partial w_m}{\partial x_2}-\frac{\partial f_m}{\partial x_1}w_m-\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\check{u}_{2,m}-\frac{1}{\tau}w_m+\frac{1}{\tau}\check{w}_m-F_m-\frac{\partial \check{p}_m}{\partial x_1}=0$$

(14)

с граничным условием

$$w_m\Big|_{\tilde{S}_m}=0, \tag{15}$$

где $$F_m=f_{\bar t}(x,t_m)-\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k^2}+f_m\frac{\partial f_m}{\partial x_1}.$$

Уравнение (14) запишем в виде

$$Jw_m\equiv\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2}-(\check{w}_m+f_m)\frac{\partial w_m}{\partial x_1}-\check{u}_{2,m}\frac{\partial w_m}{\partial x_2}-(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}+\frac{1}{\tau})w_m=\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\check{u}_{2,m}-\frac{1}{\tau}\check{w}_m+F_m+\frac{\partial \check{p}_m}{\partial x_1} \tag{16}$$

и для доказательства разрешимости (16), (15) воспользуемся теоремой Шаудера [15, 16].

Пусть рассматривается уравнение

$$Lu\equiv\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(x)u_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{2}a_i(x)u_{x_i}+a(x)u=f(x) \tag{17}$$

с граничным условием

$$u\big|_S=\varphi(s). \tag{18}$$

Пусть коэффициенты уравнения (17) и свободный член f *определены в ограниченной области* Ω *с границей* S *и принадлежат пространству* $C_{l-2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $l\geq 2$, $\alpha\in(0,1)$. *Предполагается, что* $a_{ij}=a_{ji}$ *и*

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\nu\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2, \qquad \nu=const>0, \tag{19}$$

т.е. уравнение эллиптично в $\overline{\Omega}$.

Т е о р е м а. Если коэффициенты оператора L *принадлежат* $C_{l-2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* a_{ij} *удовлетворяют неравенству (19), если* S *принадлежит* $C_{l,\alpha}$ *и если задача (17), (18) может иметь не более одного решения в* $C_{l,\alpha}(\overline{\Omega})$, *тогда при любых* $f\in C_{l-2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $\varphi\in C_{l,\alpha}(S)$ *задача (17), (18) действительно имеет решение из класса* $C_{l,\alpha}(\overline{\Omega})$, $l\geq 2$.

Известно [15], что если выполняется неравенство

$$\max_{\Omega}a(x)<0, \tag{20}$$

то задача (17), (18) не может иметь более одного решения.

Будем предполагать, что в $\tilde{\bar{\Omega}}_T$ функция $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ полуограничена снизу, т.е. справедливо неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \ge \beta = const. \tag{21}$$

Тогда при выполнении неравенства

$$\frac{1}{\tau} + \beta > 0 \tag{22}$$

и условий

$$f \in C_{l-1,\alpha}(\tilde{\bar{\Omega}}_m), \quad F \in C_{l-2,\alpha}(\tilde{\bar{\Omega}}_m), \quad \tilde{\psi}_1 \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_m), \quad \tilde{S}_m \in C_{l,\alpha}, \quad l \ge 3 \tag{23}$$

задача (16), (15) при $m=1$ имеет единственное решение $w_1 \in C_{l,\alpha}(\tilde{\bar{\Omega}}_1)$ (теорема Шаудера). Зная w_1, из соотношения $u_1 = w + f$, находим $u_{1,1} \in C_{l,\alpha}(\tilde{\bar{\Omega}}_1)$. Продолжим $u_{1,1}$, найденную на $\tilde{\bar{\Omega}}$, на всю область $\bar{\Omega}$, доопределив ее в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам $\bar{\Omega}$. Рассмотрим, например, треугольник с вершинами $(0,0),(0,\varepsilon_1),(\frac{\delta}{2},0)$. Его криволинейная сторона задается уравнением $x_2 = \theta_1(x_1)$ $(x_1 = \theta_1^{-1}(x_2))$. Полагаем $u_{1,1}(x) = u_{1,1}(x_1, x_2) = u_{1,1}(\theta_1^{-1}(x_2), x_2)$ при $0 \le x_1 \le \theta_1^{-1}(x_2)$, $0 \le x_2 \le \varepsilon_1$. На остальные криволинейные треугольники продолжение осуществляется аналогично. Функцию $u_{1,1}(x)$ $(t=\tau)$, определенную указанным образом на всей $\bar{\Omega}$, обозначаем $u_1(x)$ и решаем уравнение (2) для нахождения $u_2(x)$. Отметим, что условие вида (7) для $u_1(x)$ в общем случае не выполняется и поэтому не удается найти функцию u_2, удовлетворяющую условию $u_2\big|_{S_1 \cup S_2} = 0$, решая только уравнение (2).

Поэтому решаем (2) в областях $\Omega_1 = [0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 \le \varepsilon]$ и $\Omega_2 = [0 \le x_1 \le L, H - \varepsilon \le x_2 < H]$ с граничными условиями

$$u_2\big|_{x_2=0} = 0 \text{ и } u_2\big|_{x_2=H} = 0 \tag{24}$$

соответственно.

Для любого x_2: $0 < x_2 \le \varepsilon$ получаем

$$u_2(x_1, x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \qquad u_2(x_1, H - x_2) = -\int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \tag{25}$$

Затем интегрируем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

в области $\Omega' = [0 \le x_1 \le L\,, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$, $(\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2})$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\varepsilon_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\varepsilon_1}, \qquad u_2\Big|_{x_2=H-\varepsilon_1} = -\int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz\,. \tag{26}$$

Находим $\dfrac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_2} - \dfrac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\Big|_{z=\varepsilon_1} = -\dfrac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1(x_1,\varepsilon_1)}{\partial x_1}$.

В силу первого равенства (26) получаем

$$\frac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z}\Big|_{z=x_2} = -\frac{\partial u_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\,.$$

Интегрируем последнее равенство от $H-\varepsilon_1$ до $H-x_2$ $(\varepsilon_1 < x_2 < H-\varepsilon_1)$

$$u_2(x_1,H-x_2) - u_2(x_1,H-\varepsilon_1) = -\int_{H-\varepsilon_1}^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz\,. \tag{27}$$

В силу (27)

$$u_2(x_1,H-x_2) - u_2(x_1,H-\varepsilon_1) = -\int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz + \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz\,,$$

откуда согласно второму равенству (26) находим

$$u_2(x_1,H-x_2) = -\int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz\,. \tag{28}$$

Заметим, что решая уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0\,, \qquad x \in \Omega'$$

и используя вместо условий (26) условия

$$u_2\Big|_{x_2=\varepsilon_1} = -\int_0^{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz\,, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2=H-\varepsilon_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{x_2=H-\varepsilon_1}, \tag{29}$$

вместо (28) мы получили бы

$$u_2(x_1,x_2) = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1}dz\,. \tag{30}$$

Первое равенство (25) $(0 < x_2 \le \varepsilon = 2\varepsilon_1)$ и равенство (30) $(\varepsilon_1 < x_2 < H-\varepsilon_1)$ однозначно определяют функцию u_2 при $0 < x_2 < H-\varepsilon_1$. Второе равенство (25) однозначно определяет u_2 при $H - 2\varepsilon_1 \le x_2 < H$, но при этом u_2 определяется не интегралом (30), а интегралом (28). Необходимо показать, что названные интегралы определяют одну и ту же функцию u_2 при тех значениях x_2, при которых эта функция может быть найдена и по формуле вида (28), и по формуле вида (30).

При $x_2 = H - x_2'$ (28) дает

$$u_2(x_1,x_2') = -\int_H^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz\,, \tag{31}$$

а при $x_2 = x_2'$ (30) дает

$$u_2(x_1,x_2') = -\int_0^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz\,. \tag{32}$$

Для доказательства равенства интегралов (31) и (32) покажем, что их разность равна нулю.

$$\int_0^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz - \int_H^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{x_2'} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz + \int_{x_2'}^{H} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{H} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz\,.$$

Так как в любой точке области $0 \le x_1 \le L, 0 < x_2 < H$ выполняется (2) и справедливы граничные условия (24), то

$$\int_0^{H} \frac{\partial u_1(x_1,z)}{\partial x_1} dz = -\int_0^{H} \frac{\partial u_2(x_1,z)}{\partial z} dz = -u_2(x_1,H) + u_2(x_1,0) = 0\,.$$

Найденная функция u_2 $(t=\tau)$, будучи рассмотренной в области $\overline{\tilde{\Omega}}$, удовлетворяет условию $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$) и является нечетной по x_2.

Зная функции u_1, u_2, рассмотрим (3) с условием $(t=\tau)$

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos\alpha_j, \quad s \in \tilde{S}, \tag{33}$$

где $\frac{\partial p}{\partial \bar{n}}\Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора $\bar{n}$ внутренней нормали к $\tilde{S}$, α_i – угол между вектором $\bar{n}$ и осью Ox_i,

$$\omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}\,, \tag{34}$$

где $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ заменена разностной производной $u_{i\bar{t}}(x,t_1) = \frac{1}{\tau}(u_{i,1} - \check{u}_{i,1})$.

Условие разрешимости

$$\int_{\tilde{S}} \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s) \cos\alpha_j ds = 0 \tag{35}$$

в случае задачи (3), (33) выполняется в силу (9) и нечетности функции u_2 по x_2, при этом ее решение определено с точностью до произвольной постоянной [17] и принадлежит классу $C_{l-1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$ [15]. Итак, при $t = t_1 = \tau$ найдены функции w_1, u_1, u_2, p, т.е. найдены $w_1, u_{1,1}, u_{2,1}, p_1$ на слое $\tilde{\Omega}_1$. Переходим на слой $\tilde{\Omega}_2$ и находим $w_2, u_{1,2}, u_{2,2}, p_2$ и так далее до слоя $\tilde{\Omega}_M$.

Заключение. В результате того, что из области Ω были удалены четыре криволинейных треугольника, расположенных по углам этой области, и была введена срезающая функция, разрешимость модели оказалась доказанной в области

$$\delta < x_1 < L - \delta, 0 < x_2 < H \,,$$

которая является подобластью области Ω. Тем не менее, при реализации численного метода, рассмотренного в [9], каких-либо трудностей не возникает, так как при введении в области Ω разностной сетки с шагами h_1, h_2 в направлениях Ox_1, Ox_2 соответственно всегда можно считать, что $h_1 > \delta$, $h_2 > \varepsilon$, поскольку положительные числа δ, ε могут быть выбраны сколь необходимо малыми. В следующей работе будет показано, что можно выполнить предельный переход при $\tau \to 0$ $(t > 0)$ и тем самым доказать разрешимость дифференциальной модели.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
2. Ладыженская О.А. О модификациях уравнений Навье – Стокса для больших градиентов скоростей. // Тр. МИАН СССР.102.1967. С.85-104.
3. Каянович С.С. Об одном разностном методе для нестационарных модифицированных уравнений Навье – Стокса. // Известия АН БССР. №2. 1981. Сер. физ.-мат. наук. С. 36-40.
4. Абрашин В.Н., Лапко С.Л. Об одном классе разностных схем для уравнений вязкой несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление. // ИМ АН Беларуси. – Минск, 1992. – (Препринт; № 1 (479)).
5. Каянович С.С. Исследование разрешимости уравнений гидродинамики в областях специального вида. // Тр. БТИ. Выпуск I. 1993. Сер. V. С. 35-39.
6. Каянович С.С. Уравнения Навье – Стокса и парадоксы вязкой несжимаемой жидкости. // Тр. БГТУ. Выпуск II. 1995. Сер. V. С. 49-55.
7. Каянович С.С. О структуре и расчете регулярных течений жидкости. // Матер. Республ. научно-метод. конф., посв. 25-летию фак. прикл. мат. и информ. БГУ. Ч. 2. 1995. С. 42.
8. Каянович С.С. Стержневое течение вязкой жидкости. // Сб. научных статей. (По итогам работы Междунар. научно-практ. конф., Минск, 20-21 марта 2003 г.). Ч. 4. 2003. С. 45-50.
9. Каянович С.С. Стержневое течение вязкой жидкости. // Весці НАН Беларусі. № 3. 2013. Сер. фіз.-тэхн. навук. С. 32-35.

10. Constantin P., Fefferman C. Direction of Vorticity and the Problem of Global Regularity for the Navier-Stokes Equations., Indiana Univ. Math. J., 42(1993), pp. 775-789.
11. Schonbek M.E. Large Time Behavior of Solutions to the Navier-Stokes Equations in H^m Spaces., Comm. in partial differ. equat., V.20, Num.1&2, 1995, p. 103-117.
12. Feireisl E., Novotny A., Petzeltova H. On the Existence of Globally Defined Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations., Journal of Mathematical Fluid Mechanics 3.4 (2001), 358-392.
13. Bresch D., Desjardins B. On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids., Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 2007, V.87, № 1, p. 57-90.
14. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
15. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.
16. Schauder J., Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung., Math. Zeitschr. 38, 2 (1934), 257 – 283.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.