DOI: 10.15643/libartrus-2015.4.2

Философская интерпретация объектов математики в формализме, интуиционизме и платонизме

© Н. В. Михайлова

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Беларусь, 220013 г. Минск, ул. Петруся Бровки, 6.

Тел.: 8 (017) 293 89 21.
Email: michailova_mshrc@mail.ru

В работе предлагается философско-методологическая интерпретация математических объектов с помощью системной триады основных направлений обоснования математики: формализма Гильберта, интуиционизма Брауэра, платонизма Гёделя. На математических примерах показана необходимость этих направлений в концепции обоснования математики с точки зрения современного состояния философии математики. Философский и методологический анализ объектов математики никогда не был однозначным, поэтому, в работе используются результаты исследований философов, логиков и математиков, в которых проблема обоснования эксплицируется в контексте тенденций развития математики. Их профессиональный взгляд на философские характеристики объектов математики способствует выявлению единства всего математического знания, сохраняя при этом математические основания исходных знаний и открывая тем самым новые способы интеграции направлений обоснования в философии математики. Практическая задача обоснования математики реализуется через проработку метатеоретического знания при условии парадигмального сдвига философии математики в продуктивном направлении от анализа к синтезу.

Ключевые слова: *философия математики, проблема обоснования, современная математика, формализм, интуиционизм и платонизм.*

1. Введение

Специфика философии математики определяется тем, что как часть философии науки она занимается вопросами обоснования математики. Но зачем нужно обоснование математики? Научным всегда считалось только обоснованное знание, именно поэтому обоснование математики отличает математику от всех других видов интеллектуальной деятельности. Для обоснования познавательных теорий и схем философы математики вынуждены все чаще обращаться за помощью к самой математике, поскольку методология философских программ обоснования современной математики, выдвинутая в начале прошлого века, с точки зрения философии математики и развития математических теорий может быть признана неудовлетворительной. Проблема обоснования математических теорий тесно связана с философскими императивами конкретной эпохи и ее исследование невозможно без анализа общего контекста и философской рефлексии всего математического знания.

В этой работе акцентируется внимание на следующих трех основных направлениях обоснования обоснования современной математики: формализм Гильберта, интуиционизм Брауэра и платонизм Гёделя. Для конкретизации и дальнейшего понимания выбранной терминологии необходимо предварительно сделать методологическое замечание. Так как для новых философских идей по обоснованию математики, осознанных Лёйтзеном Брауэром, в философии науки его времени не были выработаны механизмы концептуализации в виде точного понятия алгоритма, то он предпочел ссылаться на интуицию как инструмент познания. По поводу выбора указанных направлений обоснования математики заметим, что как отмечают философы математики В. В. Целищев и А. В. Хлебалин: «Гильберт хотел избежать спекулятивных споров между интуиционистами и платонистами. Именно в этом смысле программа Гильберта часто рассматривается как часть „великой троицы" в философии математики. Между тем по своему философскому статусу программа Гильберта, а именно, формализм, существенно отличается от платонизма и интуиционизма» [1, с. 8]. Эти отличия не сильно смущают математиков в их практической деятельности, так как каждая философская программа обоснования математики в определенном смысле есть «некоторого рода крайность», призванная в конкретных разделах математики более выпукло выявить то, что, вообще говоря, неявно содержится в соответствующей математической практике.

В соответствии со своим подходом к обоснованию математики Брауэр дал ему название «интуиционизм», хотя, подчеркивая процессуальную роль конструкции, использовал также название «конструктивизм». Отличие конструктивизма от интуиционизма состоит в том, что конструктивная математика не разделяет интуиционистское убеждение в первоначальном характере математической интуиции, считая, что сама эта интуиция формируется под влиянием деятельности человека, кроме того, в ее основе лежит формализованное понятие алгоритма. К конструктивистской составляющей программы интуиционизма, с точки зрения современных реалий, можно отнести развивающуюся компьютерную математику, в которой алгоритмическая часть математики исследуется в отвлечении от ее неконструктивных разделов. Добавим к этому, что каждая составляющая системной триады направлений обоснования играет свою роль, обусловленную развитием математики.

2. Системная триада направлений обоснования

Возникает вполне естественный вопрос: почему среди всего многообразия философских подходов к обоснованию математики выбраны именно эти направления для интерпретации абстрактных объектов математики?

Во-первых, до сих пор в философской литературе обсуждаются три традиционных направления обоснования математики: логицизм, формализм и интуиционизм. Но не всегда в ней акцентируется внимание на том, что логицизм, как самостоятельное направление в философии математики, в настоящее время является малопродуктивным, так как имеется строгое обоснование неосуществимости логицистского замысла уже, например, по отношению к арифметике. Тем не менее, в философии математики выявлена связь платонизма с тремя историческими сложившимися направлениями обоснования математики, которую, например, можно охарактеризовать следующим образом: «Логицизм есть „крайний" или абсолютный платонизм. Интуиционистско-конструктивистское направление – это программа полного отказа от платонизма (т.е. номинализм). Формалистская же программа Гильберта предстает… как умеренный, „ограниченный" платонизм» [2, с. 129]. Программы обоснования математики – формализма и интуиционизма, включающего конструктивистское направление, признаны в философии математики наиболее удачными философскими направлениями XX века, поскольку способствовали выходу из философского кризиса в математике и оказывают существенное влияние на решение проблем обоснования современной математики.

Во-вторых, нельзя не отметить математиков, внесших наибольший вклад в анализ проблемы обоснования, и которые стоят за общефилософскими названиями «формализм», «интуиционизм» и «платонизм» в философии математики. Речь идет о формализме Гильберта, интуиционизме Брауэра и платонизме Гёделя. Прежде всего, необходимо отметить, что платонистский взгляд в философии математики представляется вполне естественным большинству работающих математиков, поэтому платонизм и выжил, несмотря на его теологические претензии. Интерес Курта Гёделя к проблеме обоснования следует иметь в виду при оценке того, что называют «платонизмом Гёделя». Его называют иногда «крайним платонистом» в связи с его высказыванием о том, что математические сущности доступны интуиции математика точно так же, как физические объекты доступны чувственному восприятию. «Мне кажется, – писал К. Гёдель, – что предположения о таких объектах столь же допустимы, как и предположения о физических телах, и имеется столь же много причин верить в их существование» [3, с. 217]. Заметим, что не все считают понятие «платонизм в математике» удачным, поскольку он ассоциируется с вопросами математического мышления, контекст которых не всегда понятен. Поэтому часто употребляют другие термины, например, «математический реализм», хотя сам по себе этот термин многозначен и даже теоретически перегружен, но благодаря приверженцам философии платонистского направления в обосновании математики, в философии математики возрождается идея платонизма, но уже в более умеренном виде.

В-третьих, выделенные направления обоснования математики хорошо согласуются с реальным развитием современной математики. Надо отметить, что принципиальные вопросы обоснования были поставлены математиками, которые сами же пытались дать на них ответы с точки зрения математики. Наряду с традиционными подходами к обоснованию математики есть и другие нестандартные подходы, например, структурализм. С одной стороны, это направление можно рассматривать как «антитезу» платонизму, а с другой стороны, как «разновидность» платонизма. Но основная претензия к структурализму состоит в том, что это философское направление, хотя и избавлено от метафизических крайностей, является самым простым и слишком уж прямолинейным для целостного обоснования, рассматривающим современную математику как «каталог всевозможных структур». Необходимость платонистской компоненты в обосновании математики аргументируется еще и тем, что процедуры, используемые в математике и опирающиеся на рассуждения о структурных образованиях, не являются удовлетворительными, так как понятие математической истины выходит за пределы формализма.

Наконец, для дополнительной аргументации выбора указанных направлений обоснования математики, можно сказать, что такой авторитетный ученый, как Роджер Пенроуз, выделял в проблеме обоснования эти три направления современной философии математики – формализм, платонизм и интуиционизм. Для структурирования новой концепции обоснования современной математики используется понятие «системная триада». Ее суть состоит в том, что каждое направление обоснования выявляет ту часть математики, в рамках которого она имеет особую надежность, а функционирование и развитие этой системы происходит в результате взаимодействия ее элементов в контексте единства и борьбы противоположных сторон триады. Стремление к целостности структуры обоснования математики позволяет замкнуть бинарную оппозицию «формализм Гильберта – интуиционизм Брауэра» в новую системную триаду, объединяющую три равноправных элемента обоснования математики «формализм Гильберта – платонизм Гёделя – интуиционизм Брауэра», каждый из которых участвует в совмещении оппозиций этой триады как специфическая мера методологического компромисса.

Философско-математической аргументации этой триады направлений обоснования современной математики на специально подобранных математических примерах посвящена настоящая работа. Чтобы проиллюстрировать, как реализуется системная триада обоснования, рассмотрим различные точки зрения на известные математические понятия и некоторые проблемы, акцентируя внимание на тех аспектах математических объектов, которые оказываются важными для обоснования математики. Кроме того, рассмотренные направления обоснования математики, входящие в системную триаду, отражают альтернативность точек зрения на современную математику.

3. Бинарная оппозиция «формализм – интуиционизм»

Начнем анализ системной триады обоснования математики с бинарной оппозиции «формализм – интуиционизм». Заметим, что очевидность, используемая в аргументах интуиционизма, не всегда имеет явный характер, так как в них используются также абстрактные размышления формализма. Но абстрактные математические понятия обладают своим собственным «импульсом развития», который часто возникает внутри самой математики.

В качестве подтверждения этого тезиса и доказательства плодотворности математических концепций рассмотрим знаменитый математический объект – множество Мандельброта, на примере этого фрактала можно пояснить дополнительность направлений формализма и интуиционизма и их совмещения с помощью платонизма. Интуиционизм дополняет формализм в том отношении, что некоторые принципы считаются интуитивно ясными, хотя строгость доказательства у интуиционистов не уступает логике формалистского доказательства. Например, у множества Мандельброта есть точная математическая формула, обеспечивающая счет – это можно отнести к формализму, но есть еще и алгоритм операции построения этого нестандартного математического объекта, а это уже относится к интуиционизму, или точнее конструктивизму. Философ математики В. Я. Перминов считает, что «множества Мандельброта, конечно, объективно определены операциями с комплексными числами, но мы не можем им, в отличие от арифметики и евклидовой геометрии, приписать реальную (метафизическую) значимость» [4, с. 455–456]. Следует заметить, что хотя фрактальное множество Мандельброта сложно и даже замысловато устроено, его структура полностью определяется математическим формализмом исключительной простоты.

Фрактальные объекты хорошо описываются набором математических процедур – алгоритмом, с помощью которого выявляется, а точнее последовательно визуализируется или разворачивается его геометрическая форма, например, на современном компьютере. По существу математики научились превращать абстрактные математические формулы в компьютерные программы, которые способны реально изучать мир. Поскольку процесс построения фрактального объекта бесконечен, то мера совмещения формализма и интуиционизма в нем – это платонизм, который дает уверенность в существовании законченного объекта – множества Мандельброта, то есть независимость этого фрактала в тончайших деталях от математики или компьютера придает этому множеству платонистское существование. Если говорить о существовании множества Мандельброта, то оно существует все же не в наших разумах, поскольку ни один человек не в состоянии в полной мере постичь бесконечное многообразие и сложность этого математического объекта. Однако есть и другие отличные мнения. Так возражения по поводу этого примера для подтверждения позиции реализма сводятся к тому, что речь идет не о реальной подоснове абстрактных математических теорий, а об их объективной определенности в системе математического знания.

Множество Мандельброта объективно определено операциями с комплексными числами, но мы не можем ему, в отличие от арифметики и евклидовой геометрии, приписать реальное существование. Но множество Мандельброта не может существовать и в компьютерных распечатках, так как они охватывают только часть сложно детализированной структуры фрактальных узоров, поэтому на распечатках мы видим не его, а приближение к нему, точнее его «платоновскую тень» в потенциально вневременном смысле. Поэтому, как заключает математик и физик Роджер Пенроуз, «множество Мандельброта существует и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая – и чем „глубже" мы считаем, тем более точной и детальной будет картинка. Следовательно, существовать множество Мандельброта может только в платоновском мире математических форм, больше нигде» [5, с. 37]. Он предлагает расширить рамки значения слова «существование», так как в платоновском мире математические объекты существуют не так, как существуют физические объекты, поскольку являются «вневременными объектами».

Другой пример для иллюстрации пары «формализм – интуиционизм» дает дельта-функция Дирака. В современной математике есть такие обобщения понятия функции, которые не напрямую и довольно трудно сводятся к отображениям множеств. Речь идет об обобщенных функциях, в частности, о дельта-функции Дирака, введение которых было стимулировано эмпирическими идеями из физики, что собственно и явилось новым стимулом развития функционального анализа и теории дифференциальных уравнений. Интуитивно осмысливая дельта-функцию, физик представит ее как точечную единичную массу бесконечной плотности. Но, лишь получив возможность осознавать дельта-функцию «внешним образом» как функционал на пространстве финитных функций и включив ее с помощью такой интерпретации в формализмы анализа и в общематематические теории, профессиональный математик почувствует себя в аргументации более уверенно.

Но если интуиционистская компонента в системной триаде обоснования математики должна приближать трактовку абстрактных математических понятий к современной прикладной математике, то тогда дельта-функция – это не функционал, как иногда его трактуют математики-теоретики, а функция с локализованным значением. Аргументируя необходимость платонистской компоненты, можно сказать, что обобщенные функции представляют собой «идеальные элементы», которые пополняют классические функциональные пространства по тому же образцу, по которому вещественные числа пополняют множество рациональных чисел с помощью иррациональных. В формализме теории обобщенных функций важную роль играет понятие обобщенной производной. Благодаря ей современная математика прибрела дополнительные степени свободы, способствуя конструктивному построению и постижению сути этих формально сложных математических объектов.

4. Бинарная оппозиция «формализм – платонизм»

Рассмотрим теперь в системной триаде обоснования математики вторую бинарную оппозицию «формализм – платонизм». Австрийский логик и математик Курт Гёдель показал, что непротиворечивость достаточно богатой формальной математической теории, содержащей арифметику, не может быть установлена средствами, формализованными в самой этой теории.

В контексте философского осмысления результатов Гёделя, это привело к расхождению мнений в среде математиков на неудачи с доказательством континуум-гипотезы, отчасти это свидетельствовало о недостаточности исключительно формалистского подхода к обоснованию. В частности, следует подчеркнуть, что «вера Гёделя в то, что континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна, вне зависимости от того, способны ли математики доказать ее или опровергнуть, позволяет причислить его к приверженцам платоновской идеи в математике» [6, с. 475]. Возможно, формализм должен быть дополнен семантическими рассмотрениями платонистского характера, а, с точки зрения критерия строгости математических теорий, платонизм в свою очередь допускает возможность формализации, поскольку в большинстве его интерпретаций нет иного критерия строгости, чем критерий, выведенный из формализации. Для подтверждения имеется веский аргумент, который связан с нестандартным решением проблемы, стоявшей первой в знаменитом докладе Давида Гильберта «Математические проблемы», повлиявшей на развитие математики в двадцатом столетии, то есть континуум-гипотезы Кантора.

Напомним, что сам Курт Гёдель, в предположении, что система аксиом классической теории множеств непротиворечива, доказал, что континуум-гипотеза совместна с аксиоматической системой теории множеств, а Пол Коэн доказал, что и ее отрицание совместно с этой системой. В некотором «абсолютном смысле» проблема континуум-гипотезы, относящаяся по своему содержанию к самым основаниям математики, не решена в традиционном понимании слова «решение», поскольку допускает положительное и отрицательное решение. Это первый пример утверждения, которое не может быть ни доказано, ни опровергнуто современными логическими средствами. Как же тогда математики поступают с гипотезой континуума? Обычно ее просто присоединяют к системе аксиом Цермело–Френкеля, указывая, где именно она была использована при математическом доказательстве. Ели предположить, что на шкале мощностей множеств определенное место для мощности континуума объективно существует, то, это также означает допустить существование мира идей, например, «мира множеств», не зависящего от аксиом теории множеств, которые используются в рассуждениях математиков.

О математиках, незнакомых с философскими проблемами обоснования математики, логик и философ Н. Н. Непейвода сказал: «До сих пор в работах ведущих математиков встречаются вопросы типа: „Ну да, мы слышали, что гипотеза континуума неразрешима. Но на самом деле истинна она или нет?‟» [7, с. 245]. Заметим, что в философии математики установлено, что сама постановка вопроса об истинности гипотезы континуума в теории множеств пока некорректна. Поэтому, во-первых, более мощные методы доказательства, чем используемые в стандартной теории множеств, возможно, могли бы прояснить истинность континуум-гипотезы, а во-вторых, ее истинность или ложность может зависеть от точки зрения или той веры, которой придерживаются математики. Несмотря на несводимость континуума к некоторой конструктивной процедуре, направление интуиционизма в проблеме континуума можно рассматривать как процедуру совмещения, точнее как интуитивное постижение формальных математических конструкций с платоническим существованием, хотя для интуиционистской концепции континуум не имеет того характера общности, который присущ геометрической идее континуума. Но, говоря об интуиционизме как мере совмещения в оппозиции «формализм – платонизм», необходимо заметить, что математическую интуицию все же не следует рассматривать как исключительную и единственную возможность получения математического знания о соответствующих объектах.

Другой пример для иллюстрации пары «формализм – платонизм» дает ряд натуральных чисел. Говоря о специфике ряда натуральных чисел, как идеализации количественных закономерностей, математики легко приходят к согласию относительно того, какие рассуждения о свойствах натуральных чисел следует признать убедительными и доказательными, а какие свойства могут привести к гипотезам или ошибкам. Ряд натуральных чисел – это довольно тонкая структура математики, гораздо более сложная, чем большинство других первичных понятий, хотя он, как правило, интуитивно ясен и понятен. В качестве неопределяемых понятий в арифметике Пеано фигурируют: «выделенный элемент», «натуральное число», «следующий за», которые должны быть восприняты независимо. С философско-математической точки зрения, бесконечный натуральный ряд чисел в целом, или его аналог, никто никогда не наблюдал в реальности. В формализме ряда натуральных чисел представлено по существу чисто платонистское допущение в виде правила, устанавливающего переход от одного натурального числа к другому. Знаменитое неразложимое математическое сочетание «и так далее» также составляет платонистскую сущность натурального ряда, благодаря которой каждое достигнутое натуральное число имеет «следующий за» ним элемент.

Тогда это понятие выявляет и третью компоненту в понимании ряда натуральных чисел, поскольку, например, как справедливо отмечает Герман Вейль: «Мне кажется поэтому вполне правильным говорить вместе с Брауэром об идее „всегда еще одного“, из которой возникает числовой ряд, как проявление математической интуиции» [8, с. 61]. Хорошо известно, что нельзя смешивать само натуральное число с символом, его изображающим. Но если попытаться выяснить в каком контексте натуральные числа могут быть объектами, обладающими некоторой реальностью, то здесь выявляются определенные эпистемологические трудности, поскольку аксиоматика Пеано может иметь любое количество различных философских интерпретаций, то с точки зрения логицистов, трактовка Пеано оказалась для философов «менее законченной», чем это казалось поначалу. Добавим к этому, что натуральные числа, рассматриваемые как результат пересчета объектов, сами являются конструктивными объектами, то есть можно говорить об интуиционистской составляющей натуральных чисел, которая регулирует наши рассуждения о них, и об усилении влияния компьютера на анализ новых проблем.

Для аргументации существенности интуиционистской компоненты в анализе натурального ряда чисел отметим также, что с деятельностной точки зрения формирование представления о бесконечном ряде натуральных чисел обусловлено общим стремлением к интерпретации бесконечного через конечное. С интуитивной точки зрения, множество натуральных чисел может служить моделью упорядоченной дискретной совокупности, состоящей из конечного, но неопределенно большого числа элементов. Поэтому, натуральный ряд чисел – это математическая идеализация, отражающая эту тенденцию. Заметим в связи с этим, что наряду с моделью математического натурального ряда можно также говорить о «физическом натуральном ряде», в которой очень большие натуральные числа приобретают в физическом смысле «размытый вид», не являясь уже строго определенными. Но числа такой гипотетической теории, вообще говоря, будут объектами другой природы, отличной от чисел натурального ряда. Можно заключить, что ряд натуральных чисел, существующий как актуально бесконечное множество в мире платоновских идей, одновременно присутствует где-то еще и в понимаемом нами формализуемом мире, делая окружающую нас действительность более доступной для математического понимания, а мерой их совмещения является начальное конструктивное представление о натуральных числах.

5. Бинарная оппозиция «интуиционизм – платонизм»

Рассмотрим, наконец, третью бинарную оппозицию «интуиционизм – платонизм» в системной триаде обоснования математики. Специалист по основаниям математики, немецкий математик Пауль Бернайс философски подметил, что традиционная двойственность арифметики и геометрии, в частности, связана с противостоянием интуиционизма и платонизма.

С одной стороны, понятие числа в арифметике имеет интуитивную природу, а с другой стороны, пространство в геометрии – это «изначально платонистская идея», что расходится с имеющимися в интуиционизме процедурами конструирования. Согласно Бернайсу, «две тенденции, интуиционистская и платонистская, обе необходимы, так как они дополняют друг друга», поэтому нельзя отказаться в философии математики ни от одной, ни от другой [9]. Рассмотрим в качестве соответствующего примера нигде не дифференцируемую функцию Вейерштрасса из математического анализа. Она дает неожиданный контрпример всюду непрерывной функции без производной, который разрушил традиционное представление о связи непрерывности и дифференцируемости функций и поколебал уверенность математиков в надежности геометрической интуиции. Например, известный польский математик Стефан Банах, давший одно из наиболее простых доказательств существования нигде не дифференцируемых функций, показал, что в смысле категорий почти все непрерывные функции нигде не дифференцируемы.

Этот замечательный факт из современной математики говорит о том, что легче доказать, что большинство непрерывных функций нигде не дифференцируемы, чем привести пример хотя бы одной такой функции. Поэтому, с методологической точки зрения, очень важно понимать, как может реализоваться та или иная возможность, то есть возможна ли она в интуиционистском смысле. С математической точки зрения пример функции Вейерштрасса как появление определенного рода платонистской сущности не вызывает удивления. Но, благодаря этому примеру, по-новому была осознана сама операция дифференцирования, ранее считавшаяся относительно простой и всегда осуществимой, но оказавшаяся трудновыполнимой на практике. Анализ математических аргументов дает все основания считать, что формалистская составляющая триады обоснования может служить мерой совмещения на этом математическом объекте, поскольку если строго руководствоваться формальным определением непрерывности, то можно аналитически представить функцию Вейерштрасса в виде суммы функционального ряда.

Другой пример для иллюстрации пары «интуиционизм – платонизм» дает функция Кантора, определяемая с помощью канторова множества из функционального анализа. Функция Кантора строится на основании бесконечной процедуры, когда на замыкании каждого выбрасываемого (в процессе построения канторова множества) интервала принимает значение равное середине этого интервала. Сложность формализованного построения такого рода объектов заключается в том, что оно существенно опирается на интуитивные процедуры. Это приводит к различным философским взглядам на их существование: либо они существуют как математическая модель реального мира, либо как идея, не противоречащая принятой системе аксиом, что говорит о необходимости платонистской составляющей в их обосновании. Напомним, канторово множество знаменито тем, что, хотя и имеет мощность континуума, оно очень «разреженное», то есть оно нигде не плотно на отрезке. Но, например, множество рациональных чисел любого отрезка имеет гораздо меньшую мощность, хотя оно и образует всюду плотное множество. Здесь выявляются две компоненты – интуиционистская и платонистская, которые характеризуют разные понятия, так как одно множество «мощное», оно разреженное, а другое множество хотя и «скудное», но плотное.

Если в обычном анализе понятие непрерывной функции и дифференцируемой функции имеют общность, простирающуюся далеко за наши интуитивные представления о кривой, то с помощью канторова множества можно построить непрерывную монотонную функцию, производная которой почти всюду равна нулю. Источником этой аномалии служит канторово множество. Интуитивно без формальной процедуры трудно понять, почему функция Кантора почти нигде не растет, но успевает ощутимо вырасти на множестве нулевой меры, в связи с чем, ее иногда называют «канторовой лестницей». В бинарной оппозиции «интуиционизм – платонизм» явно проявляются проблемы онтологического и гносеологического обоснования математики, которые разрабатываются с различных позиций при реализации аксиоматического и конструктивного подходов к построению математических объектов. Расхождение между интуиционизмом, точнее одним из его активно развиваемых направлений конструктивизмом, и платонизмом или математическим реализмом в оценке онтологического статуса объектов математики состоит в том, что платонизм признает существование этих объектов независимо от мышления человека, а конструктивизм требует обоснование математических объектов независимо от онтологических предпосылок.

С учетом разнообразия конструктивистских версий онтологического истолкования объектов современной математики, рассмотренные математические функции, имеющие явные реалистические основания, могут рассматриваться как интуитивные или конструктивные. Безусловно, имеются и другие примеры, реализующие системную триаду обоснования современной математики, хотя представляется, что рассмотренные выше все же наиболее философски характерные. В контексте единства и целостности различных областей современной математики, по прогнозу известного английского математика Яна Стюарта: «В течение ближайших пятидесяти лет тенденции к объединению окрепнут, и математика возродится во всей красе, без всяких наименований и сектантских раздоров. Конечно, специализация сохранится, но абстрактная логика и концептуальность будут использоваться для решения конкретных задач» [10, с. 40]. Так как все три составляющие системной триады обоснования современной математики входят в нее симметрично и равноправно, то рассмотренные примеры можно в соответствующем контексте интерпретировать для анализа других бинарных оппозиций.

6. Заключение

Еще раз обратим внимание на то, почему в системной триаде используются направления внутри математического обоснования в давно сложившейся диадной парадигме «формализм

– интуиционизм», гносеологически противостоящие друг другу. Поскольку с точки зрения математической практики, ни направление формализма, ни направление интуиционизма не являются подлинно репрезентативными для обоснования математики, то наиболее употребительный философский подход в таких ситуациях – это вложение исследуемых структур в более богатую триадическую структуру, определяемую целями философско-математического дискурса. Оба аспекта рациональности – классический, реализуемый в программе формализма, и неклассический, представленный в интуиционистском подходе, в философском обосновании математики не исключают друг друга, а способствуют становлению тринитарного подхода, принимающего вид «неформализуемой целостности».

Оглядываясь на историю развития математики, можно сказать, что в споре двух великих мыслителей прошлого века – Гильберта и Брауэра – правыми оказались оба. Философско-методологический синтез этих важных аспектов математической реальности не только потенциально возможен, но и гипотетически необходим. Приведенные математические примеры можно, например, философски интерпретировать как определенные «доказательства-свидетельства». Следует также отметить, что «использование доказательств-свидетельств, а не только доказательств-выводов, все-таки включается в смысл слова „обоснование" при трактовке знания как обоснованного истинного мнения, считающейся классической со времен Платона» [11, с. 49]. Тот, кто считает ссылки на примеры недостаточно репрезентативными, возможно, предъявляет чересчур высокие философские претензии. Можно заключить, что составляющие триады не исключают друг друга, а представляют собой единое целое в рамках концепции обоснования современной математики.

Разбор математических примеров, поясняющих необходимость включения философских направлений формализма Гильберта, интуиционизма Брауэра и платонизма Гёделя в системную триаду обоснования современной математики, можно завершить предположением, что суть этой триады состоит в методологическом примирении естественных, хотя и несовместимых онтологий. В отличие от необходимости, достаточность тернарной структуры остается пока под вопросом, хотя и существуют определенные основания в математике и философии для выделения таких структур. Системная триада обоснования выявляет содержательный и формальный уровень абстракции аксиоматической системы, чтобы построенная на ее основе математическая теория находила новые области эффективных приложений. При этом следует отметить философско-математическое убеждение работающих математиков, что развитие математики, как в определенном методологическом смысле автономной деятельности, способно к «самообоснованию». Поэтому одной из перспективных задач философии математики является выявление для современных разделов математики их способности к самообоснованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Целищев В. В., Хлебалин А. В. Интуиция, формальная онтология и семантика знаков в формализме Гильберта // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия.* **2014.** Т. 12. Вып. 3. С. 5–11.
2. Шапошников В. А. Три парадигмы в философии математики // *Эпистемология и философия науки.* **2008.** Т. 15. №1. С. 124–131.
3. Рассел Б. Расселовская математическая логика // *Введение в математическую философию.* М.: Гнозис, **1996.** С. 205–232.

4. Перминов В. Я. Метафизика и основания математики // *Метафизика. Век XXI. Альманах.* М.: БИНОМ, **2011.** Вып. 4.: Метафизика и математика. С. 441–461.
5. Пенроуз Р. *Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель.* М.: Институт компьютерных исследований, **2007.** 912 с.
6. Михайлова Н. В. Философия и математика в учении Платона: развитие идеи и современность // *Российский гуманитарный журнал.* **2014.** Т. 3. №6. С. 468–479.
7. Непейвода Н. Н. Интеллектуальные вирусы // *Логические исследования.* **2007.** Вып. 14. С. 240–251.
8. Вейль Г. *Математическое мышление: сборник.* М.: Наука, **1989.** 400 с.
9. Бернайс П. О платонизме в математике // *Платон-математик.* М.: Голос, **2011.** С. 259–275.
10. Стюарт Я. Математика 2050 года // *Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет.* М.: АСТ, **2011.** С. 37–46.
11. Карпович В. Н. О понятиях доказательства и обоснования в их отношении к знанию // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия.* **2011.** Т. 9. Вып. 3. С. 48–54.

Поступила в редакцию 13.08.2015 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2015.4.2

The philosophical interpretation of objects of mathematics in the formalism, intuitionism and Platonism

© N. V. Mikhailova

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
6 Petrus Brovka St., 220030 Minsk, Belarus.

Phone: +7 (017) 293 89 21.
Email: michailova_mshrc@mail.ru

The author of the work proposes a philosophical and methodological interpretation of the mathematical objects, using the system triad of the main directions of substantiation of mathematics: the formalism of Hilbert, Brouwer's intuitionism and Godel's Platonism. The need for these directions in the concept of substantiation of mathematics from the point of view of the current state of the philosophy of mathematics is shown on the mathematical examples. The philosophical and methodological analysis of objects of mathematics has never been unambiguous, therefore in this paper the results of studies of philosophers, logicians and mathematicians, in which the problem of substantiation is explicated in the context of trends in the development of mathematics, are used. Their professional view on philosophical characteristics of the objects of mathematics contributes to the identification of the unity of all mathematical knowledge maintaining the initial mathematical base of knowledge and revealing new ways of integrating the directions of substantiation in the philosophy of mathematics. The practical problem of substantiation of mathematics is realized through the elaboration of metatheoretical knowledge under the paradigm shift in the philosophy of mathematics to the productive direction from analysis to synthesis.

Keywords: *philosophy of mathematics, the problem of substantiation, contemporary mathematics, formalism, intuitionism, Platonism.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Mikhailova N. V. The philosophical interpretation of objects of mathematics in the formalism, intuitionism and Platonism // *Liberal Arts in Russia*. **2015**. Vol. 4. No. 4. Pp. 257–268.

REFERENCES

1. Tselishchev V. V., Khlebalin A. V. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Filosofiya.* **2014.** Vol. 12. No. 3. Pp. 5–11.
2. Shaposhnikov V. A. *Epistemologiya i filosofiya nauki.* **2008.** Vol. 15. No. 1. Pp. 124–131.
3. Russell B. *Vvedenie v matematicheskuyu filosofiyu.* Moscow: Gnozis, **1996.** Pp. 205–232.
4. Perminov V. Ya. *Metafizika. Vek XXI. Al'manakh.* Moscow: BINOM, **2011.** No. 4.: Metafizika i matematika. Pp. 441–461.
5. Penrouz R. *Put' k real'nosti, ili zakony, upravlyayushchie Vselennoi. Polnyi putevoditel' [Path to the reality or the laws that govern the universe. Complete guide].* Moscow: Institut komp'yuternykh issledovanii, **2007.**
6. Mikhailova N. V. *Liberal Arts in Russia.* **2014.** Vol. 3. No. 6. Pp. 468–479.
7. Nepeivoda N. N. *Logicheskie issledovaniya.* **2007.** No. 14. Pp. 240–251.
8. Veil' G. *Matematicheskoe myshlenie: sbornik [Mathematical thinking: collection].* Moscow: Nauka, **1989.**
9. Bernais P. *Platon-matematik.* Moscow: Golos, **2011.** Pp. 259–275.
10. Styuart Ya. *Budushchee nauki v XXI veke. Sleduyushchie pyat'desyat let.* Moscow: AST, **2011.** Pp. 37–46.
11. Karpovich V. N. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Filosofiya.* **2011.** Vol. 9. No. 3. Pp. 48–54.

Received 13.08.2015.