Філасофія

Н.В. МИХАЙЛОВА

ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЁДЕЛЯ И СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Анализируются теоремы Гёделя о неполноте, указывающие на фундаментальное свойство математического мышления, в контексте понимания сущности и природы бесконечных множеств.

This article is devoted to Godel's theorems which point out the fundamental property of mathematical thinking in the context of understanding the essence and the nature of the infinite set.

Современный этап развития философии математики можно назвать «постгёделевским». В самом названии «постгёделевская философия математики» еще звучит ориентация на предыдущую эпоху развития математического знания, но по существу уже можно говорить о начале принципиально новых взглядов в проблеме обоснования математики. Заметим, что математики на прошлое смотрят не как на предпосылку, а как на необходимую составную часть величественного здания современной математики.

Важнейший результат Курта Гёделя, а именно доказательство принципиальной неполноты достаточно богатых формальных систем, в том числе аксиоматической теории множеств, был опубликован в статье «О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем» (1931). Теорема Гёделя впервые появилась в виде теоремы VI этой работы и утверждала следующее: «Для каждого ω-непротиворечивого рекурсивного класса *% формул* существует такая рекурсивная *классовая формула r,* что ни υGen*r*, ни Neg(υGen*r*) не принадлежит к Flg(χ)(где и есть *свободная переменная формулы r)*»[1]. В оригинале это было написано по-немецки. Большинство математиков и философов математики сочтут, что и эту формулировку с тем же объемом понятности можно было оставить на немецком. На литературном языке это утверждение означает, что все непротиворечивые аксиоматические формулировки теории чисел содержат неразрешимые суждения.

Первая теорема Гёделя о неполноте утверждает: если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то она неполна, т. е. содержит истинные утверждения, которые недоказуемы и неопровержимы в ней. Полнота системы буквально означает, что каждое общее утверждение об объектах, к которым относятся аксиомы, может быть получено из этих аксиом с помощью вывода. Формальная система в конструкции Гёделя состоит из конечного множества символов и конечного числа правил, по которым эти символы можно объединять в формулы или предложения, часть их рассматривается как аксиомы. Известно, что элементарная геометрия строится как дедуктивная наука, отличаясь этим от экспериментальных знаний. Еще в Древней Греции были поняты сила и возможности логического доказательства, и именно греческие математики открыли «аксиоматический метод» для изложения геометрии, который наиболее широко стал применяться в течение двух последних столетий.

Поэтому вполне естественным выглядело в среде математиков убеждение, что для любого раздела математики можно указать набор аксиом, достаточный для вывода всех истинных предложений этой науки. Работа Гёделя показала несостоятельность такого глубоко укоренившегося убеждения. Возможности аксиоматического метода оказались существенным образом ограничены. Мощности дедуктивных методов не хватает даже на то, чтобы из конечного числа аксиом вывести все истинные утверждения о целых числах, сформулированные на языке школьной алгебры, т. е. формально нужно иметь бесконечно много новых идей. При общепринятом понимании смысла теоремы Гёделя, утверждающей, что полного финитно описываемого набора аксиом арифметики не существует, творческий характер математики выявляется с особой силой.

В проблеме обоснования математических теорий следует различать два уровня рассуждений - гносеологический и логический. Например, так называемый «финитный» способ доказательства непротиворечивости - это по существу логический факт, состоящий в выводимости определенным способом некоторых формул. Но на каком основании мы доверяем финитному рассуждению? В отношении мира математических сущностей специалист по теории доказательств Гаиси Такеути считает, что, «поскольку наш разум конечен, для нас, в конце концов, это воображаемый мир, каким бы ясным и прозрачным он ни казался»[2]. В стремлении преодолеть это «экзистенциональное отчаяние» философы математики пытаются найти убедительные аргументы в существовании такого виртуального мира.

Убежденность в «фактической» непротиворечивости предполагает также некоторое гносеологическое рассуждение. Поэтому обоснование математической теории не сводится только к логическим процедурам, а предполагает разработку некоторой гносеологической концепции достоверности, оправдывающей нашу веру в определенные средства доказательства. Можно сказать, что хотя открытия Гёделя и разрушили старые надежды, подкрепленные исследованиями по основаниям математики, но в то же время они обогатили их новыми методами рассуждений и способствовали переоценке перспектив философии математики и философии науки в духе новых идей квантовой механики.

Когда математик прерывает бесконечную операцию вычисления, он считает, что в принципе она бесконечно воспроизводима, и поэтому ее можно предположить завершенной. Поскольку постигнуть завершенное бесконечное человеку не дано ни путем откровения, ни путем мистического восприятия, то математики выражают завершенное бесконечное в символах и знаках. С течением времени нестрогие доказательства стали встречаться на практике все чаще, поэтому их надежность, вообще говоря, не зависит от гипотетически возможного «чистого», но не реализованного доказательства. Так как в общем случае оно не гарантировано от неявных допущений в языке, то принципиальный вопрос обоснования состоит в том, существуют ли в математике окончательные доказательства?

Философ математики Имре Лакатос предполагал, что содержательные доказательства только гипотетичны. Более того, и формальные доказательства, хотя и являются сами по себе вполне надежными, тоже гипотетичны. Они могут противоречить неформальным теориям, выступающим в качестве интуитивной основы формализованной теории. В силу этого значение теоремы Гёделя о неполноте оказывается довольно тонким вопросом в проблеме обоснования математической строгости. Основной философский смысл результатов Гёделя состоит в том, что мышление человека богаче любых его дедуктивных форм и что нельзя, основываясь на формальной логике, смоделировать искусственный интеллект.

С точки зрения современной теории познания математик, принимая некоторое «предварительное» основание, на которое он, насколько это возможно, опирается в своей работе, должен помнить о том, что принятое им основание не защищено от «гёделианского скептицизма». Можно сказать, что именно такие «саморазрушительные интеллектуальные упражнения» и рекомендует постмодернизм. Вопреки определенным усилиям философов представить результаты Гёделя как сенсацию, его теоремы все же не оказали «революционного влияния» ни на представление о своей науке большинства работающих математиков, ни тем более на их практическую деятельность, т. е. как говорят философы науки, смены научной парадигмы, в смысле Томаса Куна, не произошло.

Курт Гёдель не изобрел математическую логику, но он глубоко изменил своими исследованиями содержание этой науки, доказав, что если достаточно богатая формальная система непротиворечива, то в ней обязательно имеются формулы, которые истинны, но не являются доказуемыми. Но так ли уж необходимо нам знать все истины? Истинность теоремы - это лишь часть знания, содержащегося в ее доказательстве. Загадочное несоответствие человеческой и формальной логики отражено в несоответствии между понятиями «истинность» и «доказуемость». Удивительно и то, что даже способы рассуждений Гёделя, используемые им в доказательстве, по-видимому, невозможно описать в рамках формальных систем. Это, скорее всего, «романтический взгляд» на данную довольно сложную ситуацию. Более реалистичный взгляд предполагает необходимость глубокого понимания того, каким образом смысл выражается в формальных системах.

Попытка установления окончательного ответа на вопрос о сущности математики была предпринята группой Бурбаки. Толчком к созданию группы послужили глубокие идеи Анри Пуанкаре, которые тем не менее представлялись членам группы довольно шаткими. Начиная с устоявшихся базовых принципов, они пытались на их основе вывести всю остальную «архитектуру математики». Со временем большинство членов группы Бурбаки отошли от формально-аксиоматических представлений о математике, поскольку она настолько универсально содержательна, что неопределима через какие-либо методологические ограничения. Методологическая значимость результатов Гёделя состоит в том, что он показал, как при принятии определенных мер предосторожности можно известные парадоксы превратить в неразрешимые предложения.

Даже древние греки знали, что некоторые рассуждения, правильные с интуитивной точки зрения, могут иногда приводить к противоречиям, которые принято называть «логические парадоксы». Первую теорему Гёделя о неполноте можно проиллюстрировать на логической аналогии, которая принадлежит полулегендарному поэту-прорицателю Эпимениду, жившему, по преданию, на Крите в VI в. до нашей эры, и известна под названием «парадокс критянина», или парадокс лжеца. Это самое старое и самое известное из логических противоречий популяризуется в нескольких формулировках. Простейшая их них - это парадокс, связанный с высказыванием Эпименида: «Я лжец». Более популярный вариант - это «парадокс критянина Эпименида», которому приписывают высказывание, что все утверждения, сделанные критянами, ложны: «Все критяне лжецы».

Вообще говоря, в устах критянина такое утверждение с точки зрения здравого смысла звучит довольно странно, потому что он обвиняет во лжи и самого себя. Как заметил математик и логик А.В. Гладкий, «здесь нет еще настоящего противоречия»[3]. Если считать, что лжец никогда не говорит правду, то, услышав от критянина, что все критяне лжецы, отсюда можно лишь заключить, что это высказывание ложно. Если предположить, что это утверждение истинно, то из него следует: «Эпименид лжец». Но поскольку по предположению он высказал истинное утверждение, то следует признать, что «Эпименид не лжец». Поэтому мы приходим к противоречию. В современных версиях этого утверждения высказывание, описанное таким образом, ложно, причем описание построено так, чтобы оно относилось и к самому утверждению.

Курт Гёдель с помощью понятия «доказательство» дал новую интерпретацию парадокса лжеца. Он предложил следующую формулировку: «Это утверждение не имеет доказательства», изменив формулировку: «Это утверждение ложно». Если бы оно было ложным, то оно было бы доказуемым, но это противоречило бы самому утверждению. Следовательно, оно должно быть истинным, но это утверждение не может быть доказуемым в силу самого утверждения, которое по предположению истинно. Гёделю удалось записать это утверждение в математических обозначениях, точнее, свести свою конструкцию к некоторому утверждению теории чисел. Таким образом, он смог доказать, что в математике существуют утверждения, которые истинны, но истинность их не может быть доказана, т. е. это неразрешимые утверждения. Формулировка Гёделя может создать некоторую путаницу в ее правильном понимании, поскольку «доказательство» для многих является весьма приблизительным понятием.

Философами науки и интерпретаторами теорем Гёделя упускается иногда следующее важное дополнение. Философско-методологическая программа Гёделя в действительности была лишь частью длительных поисков математиков в надежде выяснить, что собой представляет «доказательство». Для математиков и логиков доказательства являются таковыми лишь внутри определенных жестких систем. В работе Гёделя такой жесткой системой, к которой относится слово «доказательство», является фундаментальный труд английских логиков и философов Бертрана Рассела и Альфреда Уайтхеда «Principia Mathematica», написанный в 1910-1913 гг. Первая теорема Гёделя по существу утверждает, что, какая бы непротиворечивая система аксиом ни использовалась, всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ, т. е. полнота недостижима.

Однако существует дополнительная трудность в современных формальных системах. Вторая теорема Гёделя утверждает, что математики никогда не смогут быть уверены в том, что их выбор аксиом не приведет к противоречию, точнее, непротиворечивость достаточно сильной теории никогда не может быть доказана внутри ее самой. В формальном варианте второй теоремы Гёделя о неполноте, которую было бы правильнее называть «теоремой о непротиворечивости», утверждается, что если система, включающая арифметику, непротиворечива, то доказательство этой непротиворечивости не может быть достигнуто в метаязыке, допускающем представление в арифметическом формализме. Но что в математике понимают под словом «непротиворечива»?

Непротиворечивость системы аксиом означает, что не существует такого утверждения, которое в этой системе чисто логическим путем выводимо одновременно с отрицанием данного утверждения. «Противоречивые системы аксиом вредны и их не следует вводить, - поясняет математик и логик В.А. Успенский, - но дело в том, что противоречивость может не сразу выявиться»[4]. Математики, безусловно, хотели бы знать заранее, что противоречащие друг другу утверждения не появятся. Исчерпывающее объяснение по этой проблеме, скорее всего, невозможно, но некоторые косвенные, психологически убедительные признаки все же существуют. Какой математикам прок в непротиворечивости самой по себе?

Наибольшее впечатление производит следующий аргумент. Противоречивая система, вообще говоря, бессмысленна, так как в ней была бы выводима любая формула. Это слишком общее утверждение в духе классических формализации логики. Противоречие ставит прежде всего под сомнение только те доказательства, которые непосредственно связаны с противоречивыми понятиями. Гёделевские определения непротиворечивости и доказательства признаны наиболее «естественными», но если определить их иначе, то непротиворечивость системы может быть доказана в ней самой. Поэтому если взглянуть на гёделевский подход исторически, т. е. с точки зрения нефундаменталистского направления, то можно понять его ограниченность контекстом определенного подхода и рассматриваемыми в то время задачами.

Можно сказать, что Гёдель изменил философскую проблему обоснования даже в том, что он по-своему уточнил ее более четкой математической формулировкой. Удивительно, что фундаменталистское направление философии математики не признает этого важного математического факта. Провозгласив, что непротиворечивость должна «на самом деле» доказываться средствами математических теорий, Гёдель проложил путь к новому теоретическому направлению, по отношению к которому старое понимание непротиворечивости выглядело слишком наивным. Почему, несмотря на то, что непротиворечивость системы Цермело - Френкеля - одной из самых распространенных аксиоматик теории множеств - до сих пор не доказана, математики довольно сдержанно реагируют на столь неопределенное положение, сложившееся в теории, претендующей быть «фундаментом» всей математики?

Здесь возможны разные ответы, отличающиеся подходом к проблеме и их аргументированностью. Что касается современного состояния математики, то рассуждения о противоречивости систем являются довольно бесплодными. Ни одна из формальных систем, широко используемых сегодня, не находится под очень серьезным подозрением оказаться противоречивой. Важность теоретико-множественных противоречий, по его мнению, иногда сильно преувеличена. Современные поиски доказательств непротиворечивости мотивируются по-разному и имеют более «серьезные» цели, чем просто избежание противоречий. Из второй теоремы Гёделя о неполноте следует, что доказательство непротиворечивости не может быть формализовано. Это говорит о необходимости использования для этих целей новых нефинитных методов, т. е. опять появляется тема бесконечности.

Теоремы Гёделя указывают нам на то, что ни одна система аксиом не может охватить всех истин. Американский математик Пол Коэн высказался однажды в том духе, что жизнь математиков была бы гораздо приятнее, не будь гильбертовская программа потрясена открытиями Гёделя. Правильная антитеза этому высказыванию, считает известный российский математик и философ науки А.Н. Паршин, должна быть такой: «Если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы»[5]. Теорема Гёделя показывает не просто ограниченность логических средств, она говорит о каком-то фундаментальном свойстве мышления, в том смысле, что если мы хотим что-то понять в мышлении человека, то это можно сделать не вопреки теореме Гёделя, а благодаря ей.

В частности, существование альтернативных, отличных от гёделевского подходов к понятию «доказательство» указывает на реальную сложность перевода неформального понятия на язык формальной математики. Однако вторая теорема Гёделя о неполноте - это не просто теорема в привычном смысле этого слова. По своему гносеологическому статусу она располагается на границе между неформальной и формальной математикой. Поэтому все еще остается открытым вопрос об эпистемологических выводах, следующих из теорем Гёделя. Теорема Гёделя о неполноте - одно из препятствий для любой попытки полностью понять сущность и природу бесконечных множеств. Одновременно, показывая, что высшие бесконечности отражаются в теории чисел, ибо позволяют нам доказывать недоказуемые без них утверждения, теорема Гёделя чрезвычайно затрудняет отстаивание той точки зрения, что высшие бесконечности можно попросту отвергнуть.

Углубленные занятия профессиональных математиков «продвинутой» областью знаний порождают иногда корыстную заинтересованность и нежелание рассматривать альтернативы. Программа Гёделя наряду с теоремами о неполноте включает в себя совершенно разные проблемы, решенные им благодаря тому, что у него не было традиционных идеалистических предрассудков, требующих исправления их введением в рассмотрение соответствующих реалистических понятий. Результаты Гёделя лучше всего могут быть поняты в терминах таких традиционно реалистических понятий, как арифметическая истинность и логическая значимость. С другой стороны, он обращался к таким понятиям конструктивистских программ, как формальные системы и интуиционистская логика. В конструктивистских подходах к основаниям математики, делающих акцент на использовании убедительных определений и способов доказательств, ощущается идеали-стическая традиция в математике.

Готфрид Лейбниц в свое время предполагал, что он нашел универсальное средство для ответов на многие вопросы. Однако именно в работах Гёделя была доказана неосуществимость Лейбницевой идеи универсальной формализации мышления. Даже величайшие мыслители древности, высказывавшие некоторые суждения об «абсолютных» математических понятиях, сопровождали их различными оговорками, понять которые можно было лишь на более высоком уровне познания. В противоположность девизу Лейбница: «Давайте посчитаем!» - современная математика, учитывая уровень ее строгости и обоснованности, склоняется к другой максиме: «Будем рассуждать!» Это правило было и остается пока основным подходом в понимании сущности бесконечных множеств и связанных с ними проблем современных оснований математического знания.

[1] Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. М., 1982. С. 91.

[2] Такеути Г. Теория доказательств. М., 1978. С. 110.

[3] Гладкий А.В. Введение в современную логику. М., 2001. С. 186.

[4] Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод? Ижевск, 2001. С. 25.

[5] Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя // Вопр. философии. 2000. № 4. С. 84-104.

Поступила в редакцию 24.07.07.

Наталия Викторовна Михайлова - кандидат философских наук, доцент, заведующий кафедрой социально-гуманитарных дисциплин Минского государственного высшего радиотехнического колледжа.