ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 162, № 1
январь, 2010

 В. В. Цегельник*

ГАМИЛЬТОНИАНЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ТРЕТЬИМ И ПЯТЫМ УРАВНЕНИЯМИ ПЕНЛЕВЕ

Получено дифференциальное уравнение типа Пенлеве для простейшего рационального гамильтониана, ассоциированного с пятым уравнением Пенлеве в случае $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$. Доказано существование ассоциированных с пятым уравнением Пенлеве в случае $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ гамильтонианов нерационального типа. Получено обобщение формул Гарнье и Окамото рациональных гамильтонианов, ассоциированных с третьим уравнением Пенлеве.

Ключевые слова: третье уравнение Пенлеве, пятое уравнение Пенлеве, гамильтониан.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние три десятилетия наблюдается заметный рост интереса к исследованию определенных классов непрерывных и дискретных вероятностных моделей, известных под названием "модели случайно-матричного типа". Источники таких моделей весьма разнообразны [1].

Одной из наиболее важных характеристик указанных моделей является нуль-вероятность – вероятность отсутствия частиц в заданном интервале или объединении интервалов.

Нуль-вероятности, как правило, могут быть представлены в виде определителей Фредгольма $\det(\mathbf{1} - K)\big|_J$, где K есть некоторый интегральный оператор, а J – множество, где не должно быть частиц. Ядро оператора K обычно имеет вид

$$K(x,y) = \frac{A(x)B(y) - B(x)A(y)}{x - y}\sqrt{\psi(x)\psi(y)} \tag{1}$$

с подходящими функциями ψ, A, B. Единственный известный на настоящий момент способ вычисления таких определителей Фредгольма состоит в их характеризации как решений некоторого обыкновенного дифференциального уравнения или системы уравнений с частными производными. В работе [2] решена задача о выводе дифференциального уравнения для нуль-вероятностей в случае синус-ядра, которое имеет вид (1) с $\psi(x) = 1/x$, $A(x) = \sin x$, $B(x) = \cos x$, и показано, что значение определителя Фредгольма единичного оператора минус синус-ядро, суженое на интервал

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. E-mail: tsegvv@bsuir.by

переменной длины t, выражается через решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(t\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)^2 = -4\left(t\frac{d\sigma}{dt} - 1 - \sigma\right)\left[t\,\frac{d\sigma}{dt} + \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - \sigma\right]. \tag{2}$$

Последовательными преобразованиями $\sigma(t) = t\,d\rho(t)/dt$,

$$\rho(t) = \rho_0 \int_0^t \left\{ \frac{\tau}{4w(1-w^2)}\left[\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 + 4w^2\right] - \frac{(1+w)^2}{4\tau w} \right\} d\tau, \qquad \rho_0 = \mathrm{const},$$

функция $\sigma(t)$ выражается через решение пятого уравнения Пенлеве (P_5)

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{3w-1}{2w(w-1)}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} + \frac{(w-1)^2}{t^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{t} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}$$

при значениях параметров $\alpha = -\beta = 1/2$, $\gamma = -2i$, $\delta = 2$.

Следует отметить, что впервые связь между определителями Фредгольма интегральных операторов и решениями уравнений Пенлеве была установлена в работе [3]. Точнее, авторами этой работы было показано, что однопараметрическое семейство решений уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\varphi + 2a_0\tau^{-1}\,\mathrm{sh}\,\varphi,$$

где a_0 – параметр, являющегося частным случаем третьего уравнения Пенлеве (P_3)

$$\frac{d^2\lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\tau}\frac{d\lambda}{d\tau} + \frac{1}{\tau}(a\lambda^2 + b) + c\lambda^3 + \frac{d}{\lambda}$$

с параметрами a, b, c, d, выражается в терминах определителей Фредгольма специального типа.

Работа [3] в идейном плане тесно связана с работами [4]–[6], в которых решалась классическая проблема (берущая начало с работы [7]) вычисления спиновых корреляционных функций двумерной модели Изинга. В работах [4]–[6] был получен важный результат [8]: скейлинговый предел двухточечной корреляционной функции двумерной модели Изинга допускает замкнутое выражение через решение уравнения P_3 при $a = b = 0$, $c = -d = 1$. Характерно [9], что главная часть этого выражения содержит гамильтониан

$$K_0 = \frac{1}{\tau}\left(\lambda^2\mu^2 - 3\lambda\mu - \frac{\tau^2}{4\lambda^2} - \frac{1}{4}\,\tau^2\lambda^2 + \frac{9}{4} + \frac{\tau^2}{2}\right), \tag{3}$$

ассоциированный с уравнением (P_3) в случае $a = b = 0$, $c = -d = 1$.

В работе [10] получено обобщение уравнения (2) на случай произвольных параметров уравнения P_5 таких, что $\gamma\delta \neq 0$. Для построения указанного уравнения автор работы [10] использовал хорошо известный факт [11] представления уравнения P_5 в виде системы Гамильтона

$$w' = \frac{\partial H}{\partial u}, \qquad u' = -\frac{\partial H}{\partial w}, \tag{4}$$

где

$$H = \frac{1}{t}\Big\{w(w-1)^2u^2 - \big[\theta_0(w-1)^2 - \theta_1 w(w-1) - \eta_1 t w\big]u + \\ + \frac{1}{4}\big[(\theta_0+\theta_1)^2 - \theta_\infty^2\big](w-1)\Big\},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\theta_\infty^2, \qquad \beta = -\frac{1}{2}\,\theta_0^2, \qquad \gamma = -\eta_1(\theta_1+1), \qquad \delta = -\frac{1}{2}\,\eta_1^2.$$

Обозначая независимую переменную t через z, уравнение P_5 в случае $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ будем рассматривать в виде

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{3w-1}{2w(w-1)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{rw}{z}, \tag{5}$$

где $r \neq 0$ – произвольная постоянная.

Известно [12], что уравнение P_5 представимо в виде системы (4) с гамильтонианом

$$H_1 = \frac{1}{z}\left[w(w-1)^2u^2 + m(w-1)^2u + n(w-1)wu + \frac{rz}{2(w-1)}\right], \tag{6}$$
$$m^2 + 2\beta = 0, \qquad (m+n)^2 - 2\alpha = 0.$$

Целью настоящей работы является построение дифференциального уравнения, определяющего функцию $h(z) = zH_1\big(z, u(z), w(z)\big)$, которое, следуя работе [13], будем называть h-уравнением. Мы покажем, что указанное h-уравнение обобщает хорошо известное уравнение, полученное в работах [14], [15] при исследовании моделей случайно-матричного типа. Будет получено обобщение формулы (6) и тем самым доказано существование ассоциированных с уравнением (5) гамильтонианов нерационального типа.

Будет получена формула гамильтониана, ассоциированного с уравнением P_3, являющаяся обобщением выражения (3) и формулы Гарнье [16] гамильтониана

$$K_1 = \frac{1}{\tau}\left(2\lambda^2\mu^2 - 3\lambda\mu - \frac{a}{4}\,\tau\lambda + \frac{b\tau}{4\lambda} - \frac{c\tau^2\lambda^2}{8} + \frac{d\tau^2}{8\lambda^2}\right), \tag{7}$$

также ассоциированного с P_3.

2. УРАВНЕНИЕ (5) И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМ ГАМИЛЬТОНИАНЫ

Введем в рассмотрение функцию $h(z) = zH_1\big(z, u(z), w(z)\big)$, заданную на решениях системы (4) с гамильтонианом H_1. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$w = \frac{2h' + r}{2h'}, \tag{8.1}$$

$$h = \frac{z^2w^2 - \big[m(w-1)^2 + nw(w-1)\big]^2}{4w(w-1)^2} + \frac{rz}{2(w-1)}. \tag{8.2}$$

Действительно, формула (8.1) получается, если продифференцировать обе части равенства $h(z) = zH_1\big(z, u(z), w(z)\big)$ и из полученного соотношения найти функцию w. Соотношение (8.2) можно получить, если в формуле (6) выразить переменную u через w, w' согласно уравнениям Гамильтона. Подстановка функции w (заданной формулой (8.1)), а также ее производной $w' = -rh''/(2h'^2)$ в соотношение (8.2) позволяет получить уравнение, определяющее функцию h:

$$z^2h''^2 + 4h'^2(zh' - h) + h'\big[(2rz - n^2)h' - 2rh - (m+n)nr\big] - \frac{(m+n)^2r^2}{4} = 0. \qquad (9)$$

Формулы (8.1) и (8.2), определяющие взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (5) и (9), позволяют сделать вывод о том, что уравнение (9) является уравнением типа Пенлеве (P-типа). Действительно, с одной стороны, общее решение уравнения (5) не имеет подвижных критических особых точек. С другой стороны, функция h (решение уравнения (9)) в силу формулы (8.2) рациональным образом выражается через решение уравнения (5) и его производную.

Пример. Уравнение (5) при $\alpha = -\beta = 1/8$, $r = -1/8$ имеет решение $w = 1 + \sqrt{z}$. Полагая в формуле (8.2) $m = 1/2$, $n = 0$, получим решение $h = 1/16 - \sqrt{z}/8$ уравнения (9). И обратно, по данному решению уравнения (9) с параметрами $m = 1/2$, $n = 0$, $r = -1/8$ получим с помощью формулы (8.1) решение $w = 1 + \sqrt{z}$ уравнения (5) с параметрами $\alpha = -\beta = 1/8$, $r = -1/8$.

Замечание. В работе [17] уравнение (9) содержится в формуле, определяющей общий вид дифференциального уравнения второго порядка второй степени, принадлежащего к классу уравнений P-типа. Однако формулы (8) взаимно однозначного соответствия между решениями уравнения (5) и уравнения (9) (позволяющие сделать вывод о принадлежности (9) к классу уравнений P-типа) в работе [17] не приведены.

Уравнение (9) при $m + n = 0$, $r = 1/2$ заменой $h \to -h$ приводится к виду

$$z^2h''^2 - 4h'^2(zh' - h) + h'\big[(z - n^2)h' - h\big] = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) получено в работе [14] при исследовании резольвенты определителя Фредгольма интегрального оператора с ядром Бесселя. В работе [15] уравнение (10) получено как частный случай дифференциального уравнения в частных производных (уравнение для нуль-вероятностей) определителя Фредгольма интегрального уравнения с ядром Бесселя.

Теорема 1. *Пусть $K(z, w)$, $L(z, w)$ – произвольные аналитические функции переменных z, w такие, что $\partial K/\partial z \equiv \partial L/\partial w$. Тогда функция*

$$H_2 = H_1(z, u + K, w) + L$$

определяет гамильтониан, ассоциированный с уравнением (5).

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть систему Гамильтона с гамильтонианом H_2, которая оказывается эквивалентной уравнению (5).

Из теоремы 1 следует существование гамильтонианов нерационального типа, ассоциированных с уравнением (5).

Следуя работе [13], уравнение (9) будем называть h-уравнением. Гамильтониан H_1 будем называть простейшим рациональным гамильтонианом.

Уравнение (5) в случае $z = e^x$, $r = 0$ записывается в виде эквивалентной ему автономной системы Гамильтона с гамильтонианом

$$H_3(x, u, w) = e^x H(x, u, w),$$

имеющей первый интеграл

$$w(w-1)^2u^2 + m(w-1)^2u + nw(w-1) = C, \tag{11}$$

где $w = w(x)$, C – произвольная постоянная. Соотношению (11) можно придать вид

$$\frac{w'^2}{w(w-1)^2} - 2\alpha w + \frac{2\beta}{w} = C_1, \tag{12}$$

где $C_1 = 4\bigl[C + m(m+n)/2\bigr]$.

Наличие первого интеграла (12) уравнения (5) в случае $r = 0$, $z = e^x$ и интегрируемость уравнения (12) в элементарных функциях были доказаны в работе [18].

3. ГАМИЛЬТОНИАНЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ P_3

Теорема 2. *Уравнение P_3 представимо в виде системы* (1) *с гамильтонианом*

$$K = \frac{\alpha_0\lambda^2(u+P)^2}{\tau} + \frac{\beta_0\lambda(u+P)}{\tau} - \frac{a\lambda}{2\alpha_0} + \frac{b}{2\alpha_0\lambda} - \frac{c\tau\lambda^2}{4\alpha_0} + \frac{d\tau}{4\alpha_0\lambda^2} + Q, \tag{13}$$

где $\alpha_0 \neq 0$, β_0 – произвольные постоянные; $P(\tau,\lambda)$, $Q(\tau,\lambda)$ – аналитические функции, удовлетворяющие условию $\partial P/\partial\tau \equiv \partial Q/\partial\lambda$.

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть систему (1) с независимой переменной τ и гамильтонианом (13) и убедиться в том, что она эквивалентна уравнению P_3.

Если в формуле (13) $P = Q \equiv 0$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -3$, $a = b = 0$, $c = 1$, $d = -1$, то гамильтониан K совпадает с K_0 с точностью до функции от τ.

Гамильтониан K_1 получается из формулы (13) при $P = Q \equiv 0$, $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = -3$.

Из формулы (13) следует существование гамильтонианов нерационального типа, ассоциированных с уравнением P_3. Ранее этот факт был установлен в монографии [12].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе для уравнения P_5 в случае $\gamma \neq 0, \delta = 0$ получено h-уравнение для простейшего ассоциированного с ним рационального гамильтониана. Получены также формулы взаимно однозначного соответствия между решениями указанных уравнений. Доказано существование ассоциированных с уравнением P_5 в случае $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ гамильтонианов нерационального типа. Получено обобщение формул Гарнье и Окамото рациональных гамильтонианов, ассоциированных с уравнением P_3.

Другие аспекты, касающиеся ассоциированных с неприводимыми уравнениями Пенлеве гамильтонианов полиномиального типа, отражены в работах [19], [20] (см. также книгу [21]) и [22], [23].

Благодарности. Автор благодарит рецензента за проявленные интерес и внимание к работе и за конструктивные замечания.

Список литературы

[1] А. М. Бородин, *Изомонодромные деформации и уравнения Пенлеве в задачах случайно-матричного типа*, Препринт ПОМИ № 04-2005; http://www.pdmi.ras.ru.
[2] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môry, M. Sato, *Physica D*, **1**:1 (1980), 80–158.
[3] B. M. McCoy, T. T. Wu, C. A. Tracy, *J. Math. Phys.*, **18**:5 (1977), 1058–1092.
[4] E. Barouch, B. M. McCoy, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **31**:23 (1973), 1409–1411.
[5] C. A. Tracy, B. M. McCoy, *Phys. Rev. Lett.*, **31**:25 (1973), 1500–1504.
[6] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, *Phys. Rev. B*, **13**:1 (1976), 316–374.
[7] L. Onsager, *Phys. Rev.*, **65**:3–4 (1944), 117–149.
[8] М. Сато, М. Дзимбо, Т. Мива, *Голономные квантовые поля*, Мир, М., 1983.
[9] K. Okamoto, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **56**:8 (1980), 367–371.
[10] K. Okamoto, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **56**:6 (1980), 264–268.
[11] J. Malmquist, *Ark. Math. Astron. Phys.*, **17**:8 (1923), 1–89.
[12] В. В. Цегельник, *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа*, БГУ, Минск, 2007.
[13] В. В. Цегельник, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 54–65.
[14] C. A. Tracy, H. Widom, *Comm. Math. Phys.*, **161**:2 (1994), 289–309.
[15] P. van Moerbeke, “Integrable lattices: random matrices and random permutations”, *Random Matrix Models and their Applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **40**, eds. P. Bleher, A. Its, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 321–406.
[16] R. Garnier, *Ann. Sci.École Norm. Sup.* (3), **29** (1912), 1–126.
[17] C. M. Cosgrove, G. Scoufis, *Stud. Appl. Math.*, **88**:1 (1993), 25–87.
[18] В. В. Голубев, *Матем. сб.*, **28**:2 (1912), 323–349.
[19] S. Yu. Slavyanov, *J. Phys. A*, **29**:22 (1996), 7329–7335.
[20] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 395–406.
[21] С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский диалект, С.-Пб., 2002.
[22] Б. И. Сулейманов, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 364–377.
[23] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé: a Modern Theory of Special Functions*, Aspects Math., **E16**, Vieweg, Braunschweig, Germany, 1991.

Поступила в редакцию 26.12.2008,
после доработки 25.05.2009