Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов радиотехнических специальностей БГУИР
всех форм обучения

В 10-ти частях

Часть 3

Н.Н. Третьякова, Т.М. Пушкарева, О.Н. Малышева

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Минск 2005

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73
С 23

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой высшей математики №1 БНТУ,
доктор технических наук, профессор Н.А. Микулик

С 23 **Сборник** задач по высшей математике для студентов радиотехнических специальностей БГУИР всех форм обучения. В 10 ч. Ч. 3: Введение в анализ / Н.Н. Третьякова, Т.М. Пушкарева, О.Н. Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.: ил.
ISBN 985-444-879-7 (ч. 3)

В третью часть сборника вошли задачи по темам: элементы теории множеств; комплексные числа; метод математической индукции; многочлены и алгебраические уравнения; теория пределов; непрерывность функции. Содержатся в сжатой форме основные теоретические сведения; решения обучающих задач разных уровней сложности; набор индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

Часть 1: Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд.– 2003, 3-е изд. – 2004.

Часть 2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.: ил.

ISBN 985-444-879-7 (ч. 3)
ISBN 985-444-448-1

Содержание

Введение

Изучение темы «Введение в анализ» у многих студентов вызывает затруднение. Объясняется это, в основном, объективными причинами: заформализованностью понятия предела и отсутствием задач прикладного характера.

В данном сборнике задач содержатся основные сведения теоретического характера по заданной теме и систематически проводится принцип геометрического осмысления вводимых понятий, что, по мнению авторов, должно облегчить их усвоение. Большое внимание уделено построению графиков функций с использованием теории пределов, при этом важнейшим инструментом построения становятся асимптоты графика.

Сборник имеет следующую структуру. Каждый его раздел содержит основные теоретические сведения по рассматриваемой в нем теме. Затем приводятся решения типичных примеров и задач разных уровней сложности. Много внимания уделено задачам, способствующим усвоению фундаментальных понятий.

В разделе 7 приведены варианты задач для самостоятельной работы, которые можно использовать в качестве заданий для типовых расчетов. Многие задачи снабжены ответами.

Знак Δ означает начало решения задачи, а знак ▲ – конец решения. Наиболее сложные задачи помечены звездочкой $(*)$.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1.1. Множества и операции над ними

Под множеством понимается совокупность элементов любой природы, называемых элементами множества. Так, можно говорить о множестве каких-либо чисел (числовом множестве), о множестве векторов, о множестве функций. Обычно множества обозначают большими латинскими буквами A, B, C, …, а их элементы – маленькими буквами a, b, c, … . Для некоторых, наиболее важных множеств приняты стандартные обозначения. Так, например, буквами **N, Z, Q, R, C** обозначаются, соответственно, множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A (принадлежит множеству A), в противном случае пишут $a \notin A$ или $a \,\overline{\in}\, A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ и говорят, что A является подмножеством множества B; множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Существуют два основных способа задания множеств.

1. Множество A определяется перечислением всех своих элементов:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}.$$

2. Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают некоторым общим свойством p:

$$A = \{x \in T \mid p(x)\},$$

где запись $p(x)$ означает, что элемент x обладает свойством p.

Например, множество $B = \{x \in R \mid (x+1)(x^2-9)(x^2+4) = 0\}$, заданное вторым способом, можно задать также и перечислением элементов, решив уравнение $(x+1)(x^2-9)(x^2+4) = 0$ во множестве действительных чисел. Очевидно, что $B = \{-1; -3; 3\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

т.е. множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\},$$

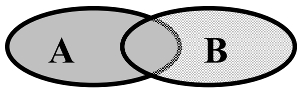
т.е. множество, состоящее из элементов, общих двум данным множествам.

Разностью множеств A и B называется множество

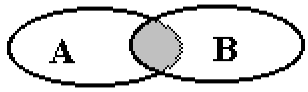
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\},$$

т.е. множество, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B. Если, в частности, A – подмножество некоторого универсального множества T, то разность $T \setminus A$ называется дополнением множества A до множества T и обозначается $\overline{A}$.

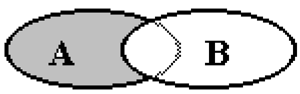
Графически эти операции над множествами можно условно изобразить следующим образом:



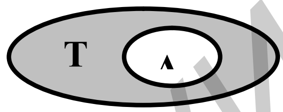
$A \bigcup B$



$A \bigcap B$



A – B



$\overline{A}$

Так, например, для множеств $A = (-1;\, 5]$ и $B = (0;\, 6]$ эти операции выглядят так:

$$A \bigcup B = (-1;\, 6], \quad A \bigcap B = (0;\, 5], \quad A \setminus B = (-1;0], \quad B \setminus A = (5;\, 6].$$

Если же в качестве универсального множества T взять R, то

$$\overline{A} = (-\infty;\, -1] \bigcup (5;\, +\infty), \quad \overline{B} = (-\infty;\, 0] \bigcup (6;\, +\infty).$$

В задачах **1.1**–**1.5** указанные множества задать перечислением всех их элементов.

1.1. $A = \{x \in N \,|\, x^2 - 5x - 6 \le 0\}$.

1.2. $A = \{x \in R \,|\; x^3 - 4x^2 + 3 = 0\}$.

1.3. $A = \{x \in Z \,|\; \frac{1}{9} \le 3^x < 27\}$.

1.4. $A = \{x \in R \,|\; \sin 3x = 0$ и $0 \le x \le \pi\}$.

1.5. $A = \{x \in N \,|\; \log_{0,5}\left(\frac{1}{x}\right) < 2\}$.

1.6. Описать перечислением всех элементов множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если

1) $A = \{x \in R \,|\; x^2 - 4x + 4 = 0\}$, $B = \{x \in R \,|\; x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

2) $A = \{x \in N \,|\; x^2 + x - 20 = 0\}$, $B = \{x \in Z \,|\; x^2 - x - 12 = 0\}$.

1.7. Найти множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и изобразить их на числовой оси, если

1) $A = (0;\, 3)$, $B = [1;\, 4]$.

2) $A = [-5;\, -1)$, $B = (-2;\, 1]$.

Приняв отрезок $T = [-1;1]$ за универсальное множество, найти и изобразить на числовой оси дополнения следующих множеств:

1.8. $(-1;\, 1)$. **1.9.** $\{-1;\, 1\}$. **1.10.** $(-0.5;\, 0.5)$.

1.11. $(-1;0]$. **1.12.** $\{0\}\bigcup[0.5;1)$.

Замечание. В формулировке многих математических утверждений часто используются слова «существует» и «для любого». Для краткости записи вместо этих слов используются логические символы $\exists$ и $\forall$, называемые, соответственно, кванторами существования и общности.

1.13. Доказать равенство: $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$.

Δ Идея доказательства равенства множеств X и Y состоит в следующем: если для $\forall a\in X\Rightarrow a\in Y$ и, наоборот, для $\forall a\in Y\Rightarrow a\in X$, то $X=Y$.

Пусть $a\in(A\bigcup B)\bigcap C$. Докажем, что $a\in(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$.

Из определений пересечения и объединения множеств следует, что $a\in C$ и $a\in A$ или $a\in B$. Не нарушая общности, считаем, что $a\in A$. Тогда из $a\in A\bigcap C\Rightarrow a\in(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$. Аналогично доказывается, что если a принадлежит правой части равенства, то a принадлежит и левой. ▲

Доказать следующие равенства:

1.14. $\overline{(\overline{A})}=A$. **1.15.** $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$.

1.16. $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$. **1.17.** $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$.

Используя результаты задач **1.13 – 1.17**, доказать следующие равенства:

1.18. $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$. **1.19.** $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\bigcup B$.

1.20. $A\bigcap\overline{(A\setminus B)}=A\bigcap B$.

1.2. Верхние и нижние границы числовых множеств

Пусть X – любое непустое множество действительных чисел. Число $M\in X$ называется наибольшим (максимальным) элементом множества X и обозначается $\max X$, если для $\forall x\in X$ выполняется неравенство $x\le M$. Аналогично определяется понятие наименьшего (минимального) элемента $m=\min X$ множества X.

Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое действительное число a, называемое верхней (нижней) гранью множества X, что $x\le a$ (соответственно $x\ge a$) для $\forall x\in X$. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным множеством. Если множество ограничено сверху, то множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется точной верхней гранью и обозначается $\sup X$. Наибольший элемент множества всех нижних граней множества X, ограниченного снизу, называется точной нижней гранью множества X и обозначается $\inf X$. Очевидно, что $\sup X=\max X$ и $\inf X=\min X$ тогда и только тогда, когда $\sup X\in X$ и $\inf X\in X$. Если множество не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup X=+\infty$ $(\inf X=-\infty)$.

1.21. Для множества $X=(0;1]$ найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$.

Δ Очевидно, что наибольший элемент этого множества равен 1, т.е. $\max X=1$, а наименьшего элемента это множество не имеет, так как для

$\forall x \in X$, $\exists$ такой $y \in X$, что $y < x$. Множество верхних граней – это множество $[1; +\infty)$ с наименьшим элементом 1. Поэтому $\sup(0; 1] = 1$ и $\max(0;1] = \sup(0; 1] = 1$. Множество же нижних граней – это множество $(-\infty; 0]$ с наибольшим элементом 0. Поэтому $\inf(0; 1] = 0$. ▲

Для следующих множеств найти $\max X, \min X, \sup X, \inf X$, если они существуют:

1.22. $X = [-1; 1]$.

1.23. $X = \{x \in R \mid x > 0\}$.

1.24. $X = [2; 5)$.

1.25. $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}, n \in N$.

1.26. $X = \{x \in R \mid x = -n; n \in N\}$.

1.27. $X = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\}, n \in N$.

1.28. Найти $\sup X$ и $\inf X$, где X – множество рациональных чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 < 2$.

1.29. Пусть X и Y – непустые множества действительных чисел, причем $Y \subset X$ и X ограничено сверху. Доказать, что Y также ограничено сверху и $\sup Y \le \sup X$.

1.30. Пусть $X \subset R$ – произвольное ограниченное множество. Доказать, что множество $-X = \{x \mid -x \in X\}$, т.е. множество чисел, противоположных по знаку числам из множества X, также ограничено и справедливы равенства: $\sup(-X) = -\inf X$, $\inf(-X) = -\sup X$.

1.31. Пусть $X, Y \subset R$ – произвольные ограниченные сверху множества. Доказать, что множество $X + Y = \{z \in R \mid z = x + y, x \in X, y \in Y\}$ ограничено сверху и $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

1.32. Пусть $X \subset R$ – ограниченное сверху и $Y \subset R$ – ограниченное снизу множества. Доказать, что множество $X - Y = \{z \in R \mid z = x - y, x \in X, y \in Y\}$ ограничено сверху и $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$.

1.3. Метод математической индукции

Во многих разделах математики приходится доказывать предположения, в формулировку которых входит натуральное число n, т.е. истинность утверждения $A(n)$ для всех $n \ge n_0$, где n_0 – некоторое заданное натуральное число. Часто это удается сделать методом математической индукции, под которым понимают следующий способ доказательства.

1. Проверяем истинность утверждения $A(n)$ при $n = n_0$.

2. Предполагаем, что $A(n)$ верно при $n = k$, где k – любое натуральное число, причем $k > n_0$.

3. Доказываем, что отсюда следует справедливость $A(n)$ при $n = k + 1$. Тогда утверждение $A(n)$ будет истинно для всех $n \ge n_0$.

1.33. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx, n \in N, x \geq -1$.

Δ 1. При $n=1$ имеем истинное высказывание: $1+x=1+x$.

2. Допустим, что неравенство верно при $n=k$, $k>1$, т.е.

$$(1+x)^k \geq 1+kx. \tag{1.1}$$

3. Докажем, что оно верно при $n=k+1$, т.е. $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Для этого умножим обе части неравенства (1.1) на неотрицательную величину $1+x$. Получим: $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. Как видим, справедливость неравенства Бернулли при $n=k$ влечет за собой выполнение этого неравенства при $n=k+1$. Отсюда по индукции следует справедливость неравенства Бернулли при всех натуральных n и $x \geq -1$. ▲

1.34. Доказать равенство

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; n \in N. \tag{1.2}$$

Δ 1. Проверим А(1): $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Rightarrow 1=1$, т.е. равенство (1.2) при $n=1$ верно.

2. Предположим, что (1.2) справедливо при $n=k$, т.е.

$$1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{1.3}$$

3. Для доказательства справедливости (1.2) при $n=k+1$ добавим к обеим частям равенства (1.3) величину $(k+1)^2$

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 =$$

$$=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right) = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Последнее соотношение означает, что равенство (1.2) справедливо при $n=k+1$. ▲

1.35. Доказать, что при $\forall\, n \in N$ число $5 \cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

Δ 1. При $n=1$ число $5 \cdot 2+3^2$ кратно 19.

2. Допустим, что при $n=k$ число $5 \cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ делится на 19.

3. Докажем данное утверждение при $n=k+1$:

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1} = 5 \cdot 2^{(3k-2)+3}+3^{(3k-1)+3} = 5 \cdot 8 \cdot 2^{3k-2}+27 \cdot 3^{3k-1} =$$

$$= 5 \cdot 8 \cdot 2^{3k-2}+8 \cdot 3^{3k-1}+19 \cdot 3^{3k-1} = 8(5 \cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1})+19 \cdot 3^{3k-1}.$$

Первое слагаемое в последнем выражении делится на 19 в силу индуктивного предположения (см. п.2), второе – так как содержит множитель 19. ▲

В задачах **1.36–1.50** методом математической индукции доказать, что:

1.36. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, $n \in N$.

1.37. $1\cdot 2+2\cdot 5+...+n(3n-1)=n^2(n+1),\ n\in N$.

1.38. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4},\ n\in N$.

1.39. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1},\ n\in N$.

1.40. n^5-n кратно 5, $n\in N$.

1.41. $n(2n^2-3n+1)$ кратно 6, $n\in N$.

1.42. $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ кратно 11, $n\in N$.

1.43. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\le\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}},\ n\in N$.

1.44. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24},\ n\ge 2$.

1.45. $(2n!)>\dfrac{4n}{n+1}(n!)^2,\ n>1$.

1.46. $2^n\cdot n!<n^n,\ n\ge 6$.

1.47*. $arctg\dfrac{1}{2}+arctg\dfrac{1}{8}+...+arctg\dfrac{1}{2n^2}=arctg\dfrac{n}{n+1},\ n\in N$.

1.48*. $\underbrace{3+33+333+...+333...3}_{n}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27},\ n\in N$.

1.49*. $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right),\ n\in N$ (левая часть содержит n корней).

1.50*. Доказать, что если p – простое число, n – натуральное, то n^p-n делится на p (теорема Ферма).

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

2.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида

$$z=x+iy, \tag{2.1}$$

где x и y – любые действительные числа; i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2=-1$.

Выражение (2.1) называется алгебраической формой комплексного числа. Числа x и y называются, соответственно, действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются: $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

Множество всех комплексных чисел обозначают С. Комплексное число вида $x+0i$ отождествляют с действительным числом x, т.е. $x+0i=x$. Таким образом, множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел; $R \subset C$. Числа вида $0+yi$ называют чисто мнимыми и обозначают yi ($y \in R$).

Модулем комплексного числа z называется действительное число

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется сопряженным для комплексного числа $z=x+iy$. Комплексные числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Алгебраические операции над комплексными числами, по определению, производятся по тем же правилам, что и операции над биномами вида $x+yi$, с учетом, что $i^2=-1$.

1. $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.
2. $z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.
3. $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

Из определения произведения комплексных чисел следует, что $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$.

4. Деление комплексных чисел производится по правилу

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}\,.$$

Модуль комплексного числа обладает следующими свойствами:

1. $|z|=|\bar{z}|$, 2. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, 3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$,

4. $|z^n|=|z|^n$, 5. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

2.1. Показать, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Δ Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Тогда $\overline{z_1+z_2}=$

$$=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}\,. \qquad ▲$$

В задачах **2.2–2.4** выполнить указанные действия и результат записать в алгебраической форме.

2.2. $i^{19}-i^{200}-i^{25}+i^{42}$.

Δ Очевидно, что $i^3=-i$, $i^4=1$. Поэтому при вычислении i^n, где $n\in N$ и $n>4$, следует n представить в виде $n=4k+m$, где $0\le m\le 3$. Тогда

$i^n = i^{4k+m} = i^{4k} \cdot i^m = (i^4)^k \cdot i^m = i^m$. В нашем примере имеем: $i^{16+3} - i^{4\cdot 50} - i^{24+1} + i^{40+2} = i^3 - 1 - i + i^2 = -i - 1 - i - 1 = -2 - 2i$. ▲

2.3. $(2-i)^2(1+11i) - 3i$.

Δ Выполняем операции по тем же правилам, что и над биномами вида $x + yi$:

$(4 - 4i + i^2)(1+11i) - 3i = (3-4i)(1+11i) - 3i = 3 + 33i - 4i + 44 - 3i = 47 + 26i.$ ▲

2.4. $\dfrac{1}{4+i} - \dfrac{3+2i}{1-i}$.

Δ Домножаем числитель и знаменатель каждой дроби на комплексное число, сопряженное для знаменателя:

$$\frac{4-i}{(4+i)(4-i)} - \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-i}{17} - \frac{1+5i}{2} = \frac{-9-87i}{34} = -\frac{9}{34} - \frac{87}{34}i.$$

Заметим, что тот же результат можно получить иначе – приводя разность дробей к общему знаменателю. ▲

2.5. Найти действительные решения уравнения

$$(1+i)x + (-2+5i)y = 17i - 4.$$

Δ Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(x - 2y) + i(x + 5y) = 17i - 4.$$

Отсюда, согласно определению равенства двух комплексных чисел, получаем систему

$$\begin{cases} x - 2y = -4, \\ x + 5y = 17. \end{cases}$$

Решив ее, находим: $x = 2,\ y = 3$. ▲

2.6. Решить уравнение: $|z| - z = 1 + 2i$.

Δ Пусть $z = x + iy$. Тогда $\sqrt{x^2+y^2} - x - iy = 1 + 2i$. Приравнивая отдельно действительные и мнимые части, получаем систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x = 1, \\ -y = 2. \end{cases}$$

Решив ее, находим: $x = \dfrac{3}{2},\ y = -2,$ т.е. $z = \dfrac{3}{2} - 2i$. ▲

2.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

Δ Данная система является линейной относительно z_1 и z_2. Решаем ее методом подстановки:

$$\begin{cases} z_1 = 1 + i - 2z_2 \\ 3(1 + i - 2z_2) + iz_2 = 2 - 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i - 2z_2 \\ z_2 = \dfrac{1 + 6i}{6 - i} \end{cases}.$$

Преобразуем z_2:

$$z_2 = \frac{(1 + 6i)(6 + i)}{(6 - i)(6 + i)} = \frac{37i}{37} = i.$$

Тогда $\begin{cases} z_1 = 1 + i - 2z_2 \\ z_2 = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = i \end{cases}$. ▲

2.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |z + 1| = |z + 2|, \\ |3z + 9| = |5z + 10i.| \end{cases}$$

Δ Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\begin{cases} |(x + 1) + iy| = |(x + 2) + iy|, \\ 3|\,(x + 3) + iy| = 5|(x + i(y + 2)| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}, \\ 3\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 5\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2, \\ 9(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 25(x^2 + y^2 + 4y + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}, \\ 4y^2 + 25y + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2} \\ y_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{3}{2} \\ y_2 = -\dfrac{17}{4} \end{cases}.$$

Итак, решения системы: $z_1 = -\dfrac{3}{2} - 2i$ и $z_2 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{17}{4}i$. ▲

В задачах **2.9–2.17** выполнить указанные действия и результат записать в алгебраической форме.

2.9. $2i^{29} - i^{84} + i^{55} + 3i^{2002}$. **2.10.** $i^{48} - 4i^{13} - 6i^{62} - i^7$.

2.11. $(1 + i)(5 - 6i)$. **2.12.** $(1 + 2i)^2 - (1 - 3i)^3$.

2.13. $\dfrac{3 + i}{2 - i}$. **2.14.** $\dfrac{1 - i}{3 + 4i}$. **2.15.** $\dfrac{1}{1 + 4i} + \dfrac{1}{4 - i}$.

2.16. $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}$. **2.17.** $\dfrac{13 + 12i}{6i - 8} + \dfrac{(1 + 2i)^2}{2 + i}$.

В задачах **2.18–2.22** найти действительные решения уравнений.

2.18. $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$.

2.19. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

2.20. $12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i$.

2.21. $(x-iy)(\alpha-i\beta)=i^5$, где α и β – действительные числа.

2.22. $\dfrac{1}{x+(y-1)i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$.

Решить уравнения:

2.23. $\bar{z}+z^2=0$. **2.24.** $|z|+z=2+i$.

2.25. $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)-13i=0$.

Решить системы уравнений:

2.26. $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,\\ (4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.\end{cases}$

2.27. $\begin{cases}(i+1)z_1+(1-i)z_2=1+i,\\ iz_1+z_2=i.\end{cases}$ **2.28.** $\begin{cases}(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8,\\ (2+i)z_1+(2-i)z_2=6.\end{cases}$

2.29. $\begin{cases}(1-i)\bar{z}=(1+i)z,\\ \left|z^2+51i\right|=1.\end{cases}$ **2.30.** $|z+1-i|=|3+2i-z|=|z+i|$.

2.2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы

Комплексное число $z=x+iy$ условно изображается на плоскости OXY точкой $M(x,y)$ или вектором $\overline{OM}$ (рис. 2.1). Плоскость OXY при этом называют комплексной плоскостью, ось OX – действительной, ось OY – мнимой осью. Длина ρ вектора $\overline{OM}$ равна модулю комплексного числа z:

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением оси OX, называется <u>аргументом</u> комплексного числа z и обозначается $\varphi=Arg\,z$. Он определяется неоднозначно – с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$Arg\,z=\arg z+2\pi k,\quad k\in Z,$$

где $\arg z$ есть главное значение $Arg\,z$, определяемое условием $-\pi<\arg z\le\pi$. (В некоторых случаях главным значением $Arg\,z$ называется значение, удовлетворяющее условию $0\le\arg z<2\pi$.) В дальнейшем значение $\arg z$ мы обозначаем буквой φ.

Заметим, что $tg\varphi=\dfrac{y}{x},\quad x\ne0$. Нетрудно доказать, что

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ \ y > 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ \ y < 0. \end{cases}$$

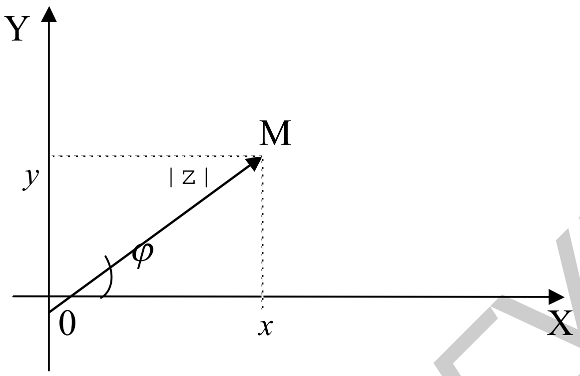


Рис. 2.1

Очевидно, что если z – действительное число, т.е. $z = x$, то $\varphi = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \pi, & x < 0. \end{cases}$

Если же z – мнимое число, т.е. $z = iy$, то $\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & y < 0. \end{cases}$

Так как $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то любое комплексное число z можно записать в виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2.2}$$

Это – тригонометрическая форма комплексного числа.

Символом $e^{i\varphi}$ обозначается комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$. С помощью этого обозначения всякое комплексное число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ может быть представлено в показательной форме:

$$z = \rho\, e^{i\varphi}. \tag{2.3}$$

Используя показательную форму записи, можно показать, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

В тригонометрической форме эти действия выглядят так:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

При <u>делении</u> комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Отметим, что складывать и вычитать комплексные числа проще всего в алгебраической форме.

В задачах **2.31–2.35** изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих следующим условиям.

2.31. $-1\le \operatorname{Im} z<2$.

Δ Данное условие равносильно неравенству $-1\le y<2$, что геометрически изображается полосой, параллельной оси OX (рис. 2.2). ▲

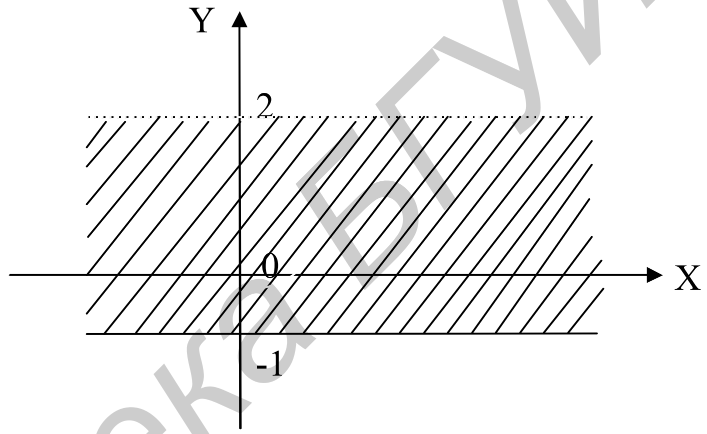


Рис. 2.2

2.32. $|z-z_0|=R$.

Данное множество точек на плоскости XOY изображается окружностью с центром в точке $(x_0;y_0)$ и радиусом R (рис. 2.3). Действительно,

$$|z-z_0|=|x+iy-x_0-iy_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \quad ▲$$

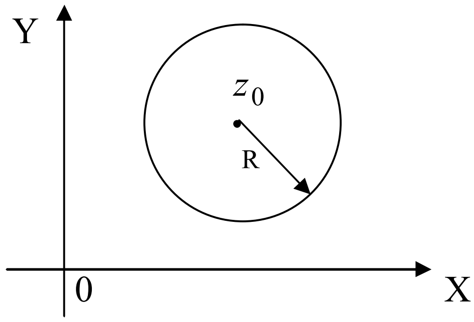


Рис. 2.3

2.33. $|z+1-2i| \le 2$.

Δ Используя результат задачи 2.32 и представляя заданное неравенство в виде $|z-(-1+2i)| \le 2$, нетрудно догадаться, что заданное множество точек есть круг с центром в точке $z_0 = -1+2i$ радиусом 2 (рис. 2.4). ▲

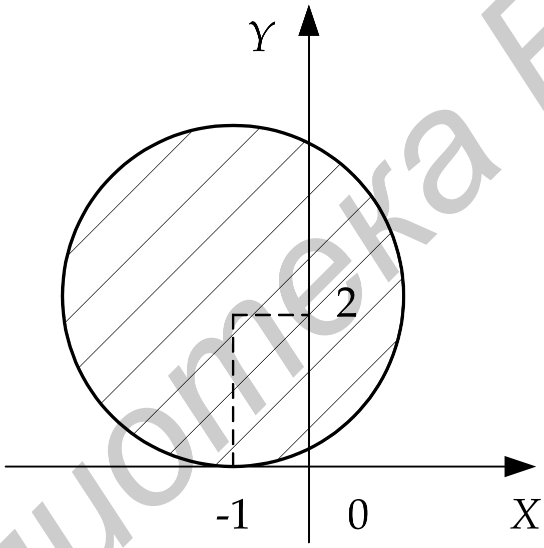


Рис. 2.4

2.34. $|z| < 1 - \operatorname{Re} z$.

Δ Преобразуем заданное неравенство:

$$\sqrt{x^2+y^2} < 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x^2+y^2 < 1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ y^2 < 1-2x. \end{cases}$$

Искомое множество показано на рис. 2.5. ▲

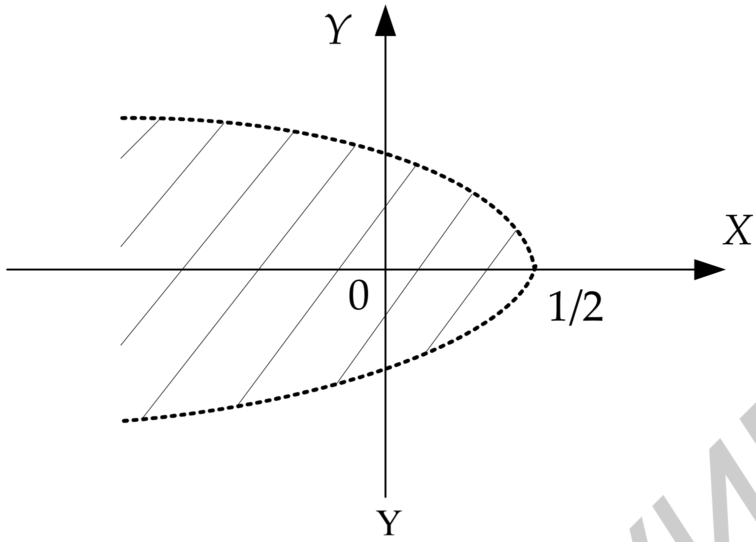


Рис. 2.5

2.35. $\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{2\pi}{3}$.

Δ Очевидно, что множество, заданное условием $\arg z = \varphi_0$, есть полупрямая, проходящая через точку О и образующая с положительным направлением оси ОХ угол φ_0. Тогда данное множество есть внутренняя часть угла, изображенного на рис. 2.6. ▲

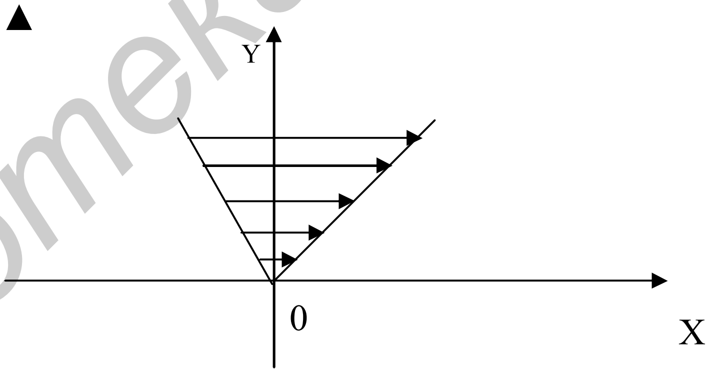


Рис. 2.6

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах.

2.36. $z = -1$.

Δ $x = -1,\ y = 0 \Rightarrow \rho = 1, \varphi = \pi \Rightarrow -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$. ▲

2.37. $z = 2i$.

Δ $x = 0,\ y = 2 \Rightarrow \rho = 2, \varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 2i = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ▲

2.38. $z = -\sqrt{3} - i$.

$\Delta \quad x=-\sqrt{3},\ y=-1 \Rightarrow \rho=\sqrt{3+1}=2, tg\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $x<0, y<0$, то $\varphi=-\pi+arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\pi+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{6}$. Тогда

$$-\sqrt{3}-i=2(\cos(-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6}))=2e^{i(-\frac{5\pi}{6})}.\quad \blacktriangle$$

2.39. $z=-2+3i$.

$\Delta\ x=-2,\ y=3 \Rightarrow \rho=\sqrt{13},\quad tg\varphi=-\dfrac{3}{2}$. Так как $x<0, y>0$, то $\varphi=\pi+arctg(-\dfrac{3}{2})=\pi-arctg\dfrac{3}{2}$. Тогда

$$-2+3i=\sqrt{13}(\cos(\pi-arctg\frac{3}{2})+i\sin(\pi-arctg\frac{3}{2}))=\sqrt{13}\cdot e^{i(\pi-arctg\frac{3}{2})}.\quad \blacktriangle$$

2.40. $z=-\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Δ Так как здесь перед $\cos\alpha$ стоит знак «–», то данное выражение не является тригонометрической формой комплексного числа! Очевидно, что $\rho=|z|=1$. Для нахождения φ воспользуемся формулами приведения: $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$. Тогда $\varphi=\pi-\alpha$ и, следовательно, $z=\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$, $z=e^{i(\pi-\alpha)}$. $\blacktriangle$

Следующие комплексные числа представить в алгебраической форме.

2.41. 1) $\sqrt{5}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 2) $4e^{i\pi}$; 3) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 4) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах.

2.42. 1) 4; 2) -3; 3) i; 4) $-5i$.

2.43. 1) $1+i$; 2) $1-\sqrt{3}i$; 3) $-2-2i$; 4) $-4\sqrt{3}+4i$.

2.44. 1) $5+12i$; 2) $-3+4i$; 3) $1-2i$; 4) $-4-i$.

2.45. 1) $\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}$; 2) $-\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}$;

3) $\sin\alpha-i\cos\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 4) $\cos\alpha-i\sin\alpha,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

2.46*. 1) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; 2) $1-\sin\alpha+i\cos\alpha,\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

2.47*. $\dfrac{5(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)}$.

2.48*. $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i(1-\cos\frac{2\pi}{5})}{i-1}$.

В задачах **2.49–2.57** изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

2.49. 1) $\operatorname{Im} z>0$; 2) $0\le \operatorname{Re} z<3$; 3) $|\operatorname{Im} z|\le 2$.

2.50. 1) $|z|<1$; 2) $|z+i|=2$; 3) $|z-i-1|\ge 3$; 4) $1<|z+2|\le 4$.

2.51. 1) $\dfrac{1}{|\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)|}\le 1$; 2) $\left|\dfrac{1}{|z|e^{i\arg z}}\right|>2$; 3) $\sin|z|>0$.

2.52. 1) $|z|=2+\operatorname{Im} z$; 2) $|z|-\operatorname{Re} z\le 0$; 3) $|z|=-z$.

2.53. 1) $|z-2|+|z+2|=26$; 2) $|z-i|-|z+3|=4$; 3) $4\le|z-1|+|z+1|\le 8$.

2.54. 1) $|z-i|\le|z+i|$; 2) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>1$; 3*) $|z-a|<|1-a\bar{z}|$; $a\in R, |a|<1$.

2.55. $|z|^2+3z+3\bar{z}=0$.

2.56. 1) $0<\arg z\le\dfrac{\pi}{3}$; 2) $|\pi-\arg z|<\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\dfrac{\pi}{6}\le\arg(z-i)\le\pi$.

2.57. 1) $\operatorname{Im}\ \bar{z}^2<1$; 2) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}<-\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{4}<\operatorname{Re}\dfrac{1}{\bar{z}}+\operatorname{Im}\dfrac{1}{\bar{z}}<\dfrac{1}{2}$.

2.3. Возведение в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа

Пусть $z=\rho e^{i\varphi}$. Тогда $z^n=\rho^n e^{in\varphi}, n\in N$, или в тригонометрической форме:

$$(\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{2.4}$$

Это и есть формула Муавра. Из нее следует, что при возведении комплексного числа в n-ю степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на n.

Число W называется корнем n-й степени, $n\in N$, из числа z (обозначается $\sqrt[n]{z}$), если $W^n=z$. Всего $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n различных значений, которые находятся по формуле

$$W_k=\sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}),$$

где $k=0,1,2,...(n-1)$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат. Заметим, что корень n-й степени из действительного числа во множестве комплексных чисел имеет также n различных значений.

Используя формулу Муавра, вычислить выражения:

2.58. $(i-\sqrt{3})^7$.

Δ Перейдем к тригонометрической форме числа $z=-\sqrt{3}+i$:

$$x=-\sqrt{3},\ y=1 \Rightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2}=2,\ tg\varphi=\frac{y}{x}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi=\pi+(arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}))=\frac{5\pi}{6}.$$

Тогда $z=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$. По формуле Муавра имеем:

$$(i-\sqrt{3})^7=(2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}))^7=128(\cos\frac{35\pi}{6}+i\sin\frac{35\pi}{6})=$$

$$=128(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})=64\sqrt{3}-64i. \qquad \blacktriangle$$

2.59. $\dfrac{(1+i)^{11}}{(1-i)^8}$.

Δ Нетрудно показать, что $1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Тогда

$$\frac{(1+i)^{11}}{(1-i)^8}=\frac{(\sqrt{2})^{11}e^{i\frac{11\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^8 e^{-2\pi i}}=2\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{11\pi}{4}+2\pi)}=2\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{3\pi}{4}+4\pi)}=$$

$$=2\sqrt{2}(\cos(4\pi+\frac{3\pi}{4})+i\sin(4\pi+\frac{3\pi}{4}))=-2+2i. \qquad \blacktriangle$$

2.60. Пользуясь формулой Муавра, выразить через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ функции $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$.

Δ Из формулы Муавра (2.4) следует:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi.$$

С другой стороны,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=(\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi)+i(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi-\sin^3\varphi).$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем:

$$\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=(\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi)+i(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi-\sin^3\varphi).$$

Из равенства комплексных чисел следует, что

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi,\ \ \sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi-\sin^3\varphi, \text{ или}$$

$$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi,\ \ \sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi. \qquad \blacktriangle$$

Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения корней:

2.61. $\sqrt[4]{-16}$.

Δ Так как $-16=16e^{i\pi}=16e^{i(\pi+2\pi k)}$, то

$$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\cdot e^{i(\frac{\pi+2\pi k}{4})}=2(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}),\text{ где } k=0,1,2,3.$$

При $k = 0$ $\quad W_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

при $k = 1$ $\quad W_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

при $k = 2$ $\quad W_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$,

при $k = 3$ $\quad W_4 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Корни W_1, W_2, W_3, W_4 являются вершинами квадрата, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рис. 2.7). ▲

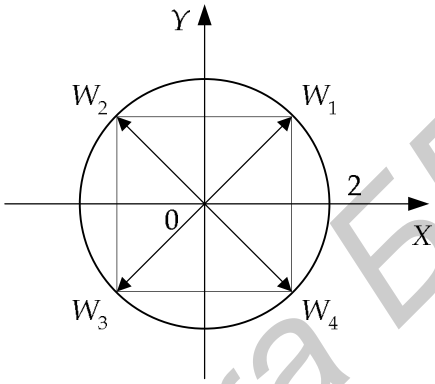


Рис.2.7

2.62. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

Δ Так как $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k)}$, то

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = e^{i(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3})} = e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k)} = \cos(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k) + i\sin(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k),$$

где $k = 0, 1, 2$. Отсюда получаем:

при $k = 0$ $\quad W_1 = \cos(-\frac{\pi}{9}) + i\sin(-\frac{\pi}{9})$;

при $k = 1$ $\quad W_2 = \cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$;

при $k = 2$ $\quad W_3 = \cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}$.

Корни W_1, W_2, W_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 1$ (рис. 2.8). ▲

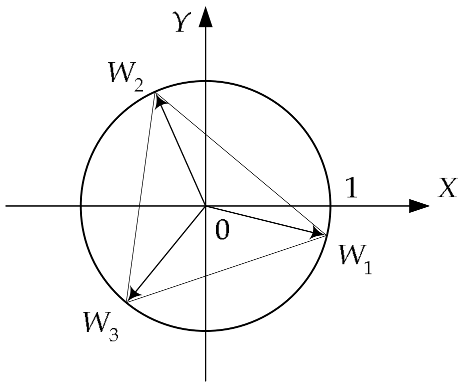


Рис. 2.8

Используя формулу Муавра, вычислить следующие выражения:

2.63. 1) $(1-i)^5$; 2) $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{40}$.

2.64. $(\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)^{10}$.

2.65. $\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$.

2.66. $\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{3}i+1}\right)^{12}$.

2.67. $\dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in N$.

2.68. $(tg2-i)^4$.

2.69*. $(\sin\frac{6\pi}{5}+i(1+\cos\frac{6\pi}{5}))^5$.

2.70. При каких значениях n справедливо равенство $(1+i)^n=(1-i)^n$?

2.71. Доказать, что $\left(\dfrac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\,tg\,n\alpha}{1-i\,tg\,n\alpha}$.

2.72. Доказать, что если $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=1$, $n\in N$, то $(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=1$.

2.73. Пользуясь формулой Муавра, выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ функции $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$.

2.74*. Найти сумму $\cos x+\cos 2x+...+\cos nx$.

2.75. Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степеней из 1.

В следующих задачах найти все значения корней:

2.76. $\sqrt{i}$. **2.77.** $\sqrt[3]{-8}$. **2.78.** $\sqrt[4]{-i}$. **2.79.** $\sqrt[3]{-1+i}$.

2.80. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$. **2.81.** $\sqrt[5]{-1-i}$. **2.82.** $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$.

2.83*. Одна из вершин правильного пятиугольника находится в точке (1, 0). Найти координаты остальных его вершин.

2.4. Многочлены и алгебраические уравнения

Многочленом или полиномом степени n от z называется функция

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \tag{2.5}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные коэффициенты ($a_n \neq 0$, $a_k \in R$, $k = \overline{0,n}$); $z = x + iy$ – комплексное переменное.

Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2.6}$$

называется алгебраическим уравнением n-й степени. Число z_1, для которого $P_n(z_1) = 0$, называется корнем многочлена $P_n(z)$ или корнем уравнения (2.6).

Теорема 2.1 (Гаусс). Любой многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).

Теорема 2.2 (Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ на линейный двучлен $z - \alpha$ равен $P_n(\alpha)$.

Следствие. Число z_1 есть корень многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ без остатка делится на двучлен $z - z_1$, т.е. имеет место равенство

$$P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-1}(z), \tag{2.7}$$

где $Q_{n-1}(z)$ – многочлен $(n-1)$-й степени.

Пусть $n > 1$. Тогда, применяя теоремы Гаусса и Безу к многочлену $Q_{n-1}(z)$, получим, что существует число z_2, являющееся его корнем и

$$Q_{n-1}(z) = (z - z_2)\widetilde{Q}_{n-2}(z),$$

где $\widetilde{Q}_{n-2}(z)$ – многочлен степени $(n-2)$.

Повторяя те же рассуждения неоднократно, мы в конце концов придем к многочлену нулевой степени, т.е. к числу, и получим:

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n). \tag{2.8}$$

Формула (2.8) называется разложением многочлена на линейные множители.

Объединяя в (2.8) одинаковые множители, имеем:

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}...(z - z_m)^{k_m}, \tag{2.9}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_m = n.$

Если в разложении (2.9) множитель $z - \alpha$ содержится в некоторой степени k, то число $z = \alpha$ называется корнем k-й степени данного многочлена. Таким образом, из разложения (2.9) видно, что корень z_1 имеет кратность k_1, корень z_2 – кратность k_2 и т.д., корень z_m – кратность k_m.

Следствие из теоремы Гаусса. Каждый многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Пример. Найти корни многочлена $P_7(z) = z^7 - 2z^5 + z^3$ и определить их кратность.

Δ Преобразуем $P_7(z)$ следующим образом:

$$P_7(z) = z^3(z^4 - 2z^2 + 1) = z^3(z-1)^2(z+1)^2. \qquad (2.10)$$

Из (2.10) ясно, что $P_7(z)$ имеет корни $z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -1$ кратностей 3, 2 и 2, соответственно. ▲

Если $P_n(z)$ имеет комплексный корень $z_0 = x_0 + iy_0$ кратности *k,* то сопряженное для него число $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ также является корнем этого многочлена, причем той же кратности. Отсюда следует, что разложение (2.9) содержит не только $(z - z_0)^k$, но и $(z - \overline{z_0})^k$, а значит, содержит их произведение, которое можно представить в виде

$$(z - z_0)^k (z - \overline{z_0})^k = (z^2 + pz + q)^k,$$

где $p = -2x_0, \quad q = x_0^2 + y_0^2$ и $z^2 + pz + q$ есть трехчлен с отрицательным дискриминантом:

$$D = p^2 - 4q = -4y_0^2 < 0.$$

Объединяя в (2.9) попарно скобки, соответствующие комплексно-сопряженным корням, приходим к разложению:

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1} ... (z - z_s)^{k_s} (z^2 + p_1 z + q_1)^{\lambda_1} ... (z^2 + p_l z + q_l)^{\lambda_l}, \qquad (2.11)$$

где $z_1, z_2, ..., z_s$ – действительные корни, а числа p_m, q_m удовлетворяют условию $p_m^2 - 4q_m^2 < 0, \quad (m = 1,2...l)$ и соответствуют комплексно-сопряжен- ным корням.

Формула (2.11) называется разложением многочлена на минимальные линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

Формулы Виета

Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ – действительные корни многочлена

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

Тогда, согласно (2.8),

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0. \qquad (2.12)$$

Раскрывая в (2.12) скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -a_{n-1}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n = a_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n a_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Формулы (2.13) выражают зависимость между коэффициентами приведенного многочлена (старший коэффициент которого равен единице) и его корнями и называются формулами Виета.

Для многочлена общего вида

$$Q_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

формулы Виета легко получить, поделив обе части уравнения $Q_n(z) = 0$ на a_n. Тогда, используя (2.13), имеем:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + +z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Соотношения (2.14) называют обобщенными формулами Виета.

При решении уравнений с целыми коэффициентами часто оказываются полезными следующие теоремы, являющиеся следствием формул Виета.

Теорема 2.3 Целые корни алгебраического уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена a_0.

Теорема 2.4 Если несократимая дробь $\dfrac{l}{m}$ (l и m – целые числа) служит корнем многочлена $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ с целыми коэффициентами, то число l будет делителем свободного члена a_0, а m – делителем старшего коэффициента a_n.

Пример. Решить уравнение $z^3 - 6z - 9 = 0$.

Δ Свободный член многочлена равен –9. Его делителями являются числа $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Нетрудно убедиться, что число $z_1 = 3$ будет корнем данного уравнения. Поделим многочлен $z^3 - 6z - 9$ на двучлен $z - 3$:

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{rl}
z^3 - 6z - 9 & \underline{\big|\, z-3 \quad} \\
{}^{-}\underline{z^3 - 3z^2 \qquad} & z^2 + 3z + 3 \\
\quad 3z^2 - 6z - 9 & \\
{}^{-}\underline{3z^2 - 9z \qquad} & \\
3z - 9 & \\
{}^{-}\underline{3z - 9} & \\
0 &
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\Rightarrow z^3 - 6z - 9 = \\
= (z-3)(z^2 + 3z + 3)
\end{array}
\end{array}
$$

Затем, по обычным формулам для корней квадратного трехчлена, находим два других корня:

$$z^2 + 3z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2}.$$

<u>Ответ</u>: $z_1 = 3, \quad z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$ ▲

2.84. Разложить многочлен $P_5(z) = z^5 + z^4 + 16z + 16$ в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Δ Преобразуем $P_5(z)$, сгруппировав его слагаемые так:

$$P_5(z) = z^4(z+1) + 16(z+1) = (z+1)(z^4 + 16). \tag{2.15}$$

Из (2.15) видно, что $z_1 = -1$ – корень $P_5(z)$. Остальные корни являются решениями уравнения $z^4 + 16 = 0$ и равны

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16e^{i(\pi + 2\pi k)}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k)}, \tag{2.16}$$

где $k = 0,1,2,3$.

Подставляя в (2.16) поочередно допустимые значения k, получим:

$z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z_5 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$ Тогда

$$P_5(z) = (z+1)(z - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z - \sqrt{2} + i\sqrt{2})(z + \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z + \sqrt{2} + i\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_5(z) = (z+1)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4). \tag{2.17}$$

Заметим, что указанный способ хотя и надежен, но приводит к довольно большим вычислениям. Приведем другой, более изящный.

Дополним двучлен $z^4 + 16$ до полного квадрата:

$$z^4 + 16 = (z^4 + 8z^2 + 16) - 8z^2 = (z^2 + 4)^2 - 8z^2.$$

Теперь применим формулу разности квадратов. Тогда

$$z^4 + 16 = (z^2 + 4 - 2\sqrt{2}z)(z^2 + 4 + 2\sqrt{2}z). \tag{2.18}$$

Подставляя разложение (2.18) в (2.15), мы приходим к той же формуле (2.17), но гораздо быстрее. ▲

2.85. Представить многочлен $P_3(z) = 2z^3 + 3z^2 + 4z - 3$ в виде произведения линейных множителей.

Δ Найдем подбором один из корней многочлена. Целые корни многочлена являются делителями свободного члена –3, следовательно, ими могут быть только числа $\pm 1, \pm 3$. Но подстановка этих чисел в уравнение $P_3(z) = 0$ показывает, что ни одно из них не является его корнем. Следовательно, данный многочлен целых корней не имеет.

Пусть $P_3(z)$ имеет рациональный корень вида $\dfrac{l}{m}$ (где l и m – целые числа), тогда его нужно искать среди чисел $\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}$ (l – делитель свободного члена $a_0 = -3$, m – делитель старшего коэффициента $a_3 = 2$). Подставляя $z_1 = \dfrac{1}{2}$, убеждаемся, что $z_1 = \dfrac{1}{2}$ – корень многочлена. Разделив $P_3(z)$ на $z - \dfrac{1}{2}$, получаем:

$$2z^3 + 3z^2 + 4z - 3 = (z - \frac{1}{2})(2z^2 + 4z + 6) = 2(z - \frac{1}{2})(z^2 + 2z + 3).$$

Решая уравнение $z^2 + 2z + 3 = 0$, находим два других корня:

$$z_2 = -1 + 2i, \quad z_3 = -1 - 2i.$$

В результате получаем разложение данного многочлена на линейные множители: $2z^3 + 3z^2 + 4z - 3 = 2(z - \frac{1}{2})(z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i)$. ▲

Схема Горнера

Для определения кратности корней многочлена очень удобно пользоваться методом, называемым схемой Горнера. Изложим его суть.

Пусть при делении многочлена $A_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ на бином $z - z_0$ в частном получился многочлен $B_{n-1}(z) = b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0$, а в остатке – число, т.е. $A_n(z) = (z - z_0) B_{n-1}(z) + r$. Отсюда нетрудно вывести зависимость между коэффициентами b_k, остатком r и коэффициентами a_k:

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{k-1} = z_0 b_k + a_k, \quad (k = \overline{n-1, 1}), \quad r = z_0 b_0 + a_0. \qquad (2.19)$$

При вычислениях используют таблицу

	a_n	a_{n-1}	…	a_k	…	a_1	a_0
z_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = z_0 b_{n-1} +$ $+ a_{n-1}$		$b_{k-1} = z_0 b_k +$ $+ a_k$		$b_0 = z_0 b_1 +$ $+ a_1$	$r = z_0 b_0 +$ $+ a_0$

Так, например, схема Горнера для деления многочлена $2z^3 - 3z^2 + 4z + 5$ на двучлен $z + 1$ имеет вид

	a_3	a_2	a_1	a_0
	2	-3	4	5
-1	2	-5	9	-4
	b_2	b_1	b_0	r

[redacted]

2.86. Определить порядок кратности корня $z_0 = 2$ для многочлена $z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8$.

Δ Выполняя последовательно деление многочленов на $z - 2$ по схеме Горнера, получаем:

этап I:

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0

[redacted]

этап II:

	1	-3	1	0	4
2	1	-1	-1	-2	0

[redacted]

этап III:

	1	-1	-1	-2
2	1	1	1	0

[redacted]

Легко убедиться, что $z_0 = 2$ не является корнем многочлена $z^2 + z + 1$. Тогда на этом этапе процесс деления заканчиваем. Подставляя результаты деления в (2.20), получим:

$$P_5(z) = (z-2)^3(z^2 + z + 1). \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что кратность корня $z = 2$ равна 3. ▲

В задачах **2.87–2.88** с помощью схемы Горнера найдите кратность корня z_0 для многочлена *P(z)*.

2.87. $P(z) = z^5 + 7z^4 + 16z^3 + 8z^2 - 16z - 16, \quad z_0 = -2.$

2.88. $P(z) = z^4 - 6z^3 + 10z^2 - 6z + 9, \quad z_0 = 3.$

2.89. При делении многочлена $P_3(z)$ на $z - 1$ и $z - 2$ остатки соответственно равны 1 и 2. Найти остаток от деления $P_3(z)$ на $(z-1)(z-2)$.

Δ По условию имеем:

$$r_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_3(z) = \widetilde{P}_2(z)(z-1) + 1, \tag{2.22}$$

$$r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_3(z) = \widetilde{\widetilde{P}}_2(z)(z-2) + 2. \tag{2.23}$$

Результат деления $P_3(z)$ на $(z-1)(z-2)$ имеет вид

$$P_3(z) = (z-1)(z-2)(az+b) + cz + d, \qquad (2.24)$$

где $r = cz + d$ – искомый остаток.

Из (2.22), (2.23) следует, что $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$. С другой стороны, из (2.24) имеем: $P_3(1) = d + c$, $P_3(2) = d + 2c$. Откуда следует, что

$$\begin{cases} d + c = 1 \\ d + 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad r = cz + d = z.$$

<u>Ответ</u>: остаток равен z. ▲

2.90*. Найдите все корни многочлена $z^4 - 16z^3 + 86z^2 - 176z + 105$, зная, что они образуют арифметическую прогрессию.

<u>Указание.</u> Воспользуйтесь формулами Виета.

2.91*. Найдите многочлен третьей степени, если его корни равны z_1^2, z_2^2, z_3^2, где z_1, z_2, z_3 – корни многочлена $z^3 - z^2 - 4z + 4$.

В задачах **2.92–2.93** найдите целые корни многочленов.

2.92. $6z^4 + z^3 - 2z^2 - 4z - 1$.

2.93. $2z^5 + 7z^4 + 3z^3 - 11z^2 + 11z + 20$.

В задачах **2.94–2.95** найдите рациональные корни многочленов.

2.94. $4z^4 - 7z^2 - 5z - 1$.

2.95. $z^5 - 2z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 5z + 6$.

В задачах **2.96–2.97** найдите все корни многочленов.

2.96. $P(z) = z^3 - 3z + 2$.

2.97. $P(z) = z^3 + 5z^2 + 8z + 4$.

В задаче **2.98*** найдите $S(z)$, зная, что z_1, z_2, z_3 – корни $P(z)$.

2.98*. $S(z) = \dfrac{1}{2 - z_1} + \dfrac{1}{2 - z_2} + \dfrac{1}{2 - z_3}$, $\quad P(z) = z^3 - 3z - 1$.

2.99. При делении многочлена $P_3(z)$ на $z+1$ и $z+3$ остатки соответственно равны 2 и 6. Найти остаток от деления $P_3(z)$ на $(z+1)(z+3)$.

2.100*. При делении многочлена $P_4(z)$ на $z-1$, $z+1$ и $z-3$ остатки равны соответственно 1, –1 и 11. Найти остаток от деления $P_4(z)$ на $(z-1)(z+1)(z-3)$.

3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

3.1. Понятие числовой последовательности

Числовой последовательностью $\{x_n\}$ называется функция $f: N \to R$, областью определения которой является множество натуральных чисел, т.е. $x_n = f(n)$. Число x_n называется общим членом последовательности $\{x_n\}$, а формула $x_n = f(n)$ – формулой общего члена этой последовательности.

Последовательность также может задаваться рекуррентно, т.е. формулой, выражающей x_n через члены с меньшими номерами. Так определяются, например, арифметическая и геометрическая прогрессии:

$$a_n = a_{n-1} + d, \qquad\qquad b_n = b_{n-1} \cdot q$$

и последовательность чисел Фибоначчи:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется невозрастающей (неубывающей), если для $\forall n \in N$, $x_{n+1} \leq x_n$, $(x_{n+1} \geq x_n)$. Невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для $\forall n \in N$ $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$. Возрастающие и убывающие последовательности называются строго монотонными.

3.1. Написать первые пять членов последовательности $\{x_n\} = \{n!\}$.

Δ По определению n-факториал равен:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Тогда $x_1 = 1! = 1$, $x_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $x_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $x_4 = 4! = 3! 4 = 6 \cdot 4 = 24$, $x_5 = 4! 5 = 24 \cdot 5 = 120$.

Итак, $\{n!\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$. ▲

3.2. Написать формулу общего члена последовательности:

1) $\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \ldots\}$, 2) $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$.

1. Δ Отмечаем, что в числителе каждого члена последовательности $\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \ldots\}$ стоит нечетное число, а в знаменателе – четное. В таком случае $|x_n| = \dfrac{2n-1}{2n}$. Чередование знаков в этой последовательности идет по закону $\{+, -, +, -, + \ldots\}$, что можно обеспечить домножением $|x_n|$ на $(-1)^n$ или

$(-1)^{n+1}$. Учитывая, что $x_1 = \frac{1}{2} > 0$, выбираем последний вариант. Окончательно получаем: $x_n = (-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2n}$. ▲

2. Δ Нетрудно доказать, что общий член последовательности $\{1, 0, -1, 0, ...\}$ можно задать формулой: $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$. ▲

Написать первые пять членов последовательности:

3.3. $x_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

3.4. $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

3.5. $x_n = n\cdot(1+(-1)^n)$.

3.6. $x_n = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$.

Найти формулу общего члена последовательности:

3.7. $\{2, 3/2, 4/3, 5/4, ...\}$.

3.8. $\{1/2, -1/3, 1/4, -1/5, ...\}$.

3.9. $\{4, 0, 4, 0, 4, ...\}$.

3.10. $\{-3, 5/3, -7/5, 9/7, -11/9, ...\}$.

3.11***.** $\{0.3, 0.33, 0.333......\}$.

3.12***.** $\{1/2, 1/2, 3/8, 1/4, 5/32, ...\}$.

Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно:

3.13. $x_1 = 5, \quad x_{n+1} = x_n + 3$.

3.14. $x_1 = 3, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$.

3.15. $x_1 = 1/2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$.

3.16***.** Последовательность чисел Фибоначчи: $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \ge 3$.

Указание. Представьте x_n в виде $x_n = \lambda^n$.

3.17***.** $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4}x_{n-2}, \quad n \ge 3$.

3.18. Из данных последовательностей выбрать а) возрастающие, б) убывающие, в) ограниченные, г) ограниченные сверху, д) ограниченные снизу последовательности:

1) $\{2^n\}$, 2) $\{\frac{1}{n}\}$, 3) $\{(-1)^n\}$, 4) $\{-n\}$.

Найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности x_n:

3.19*. $x_n = 3n^2 - 10n - 14$.

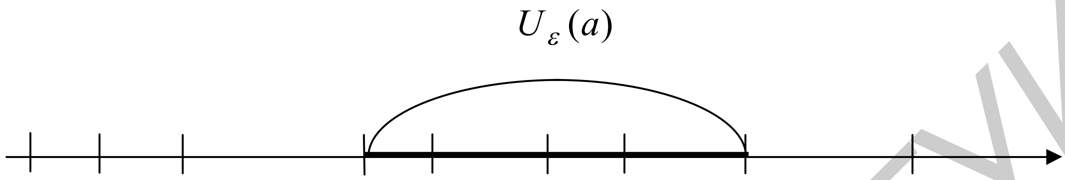
3.20. $x_n = 6n - n^2 - 5$.

3.21*. $x_n = \frac{2n-5}{2n-11}$.

3.22*. $x_n = \frac{21}{3n^2 - 14n - 17}$.

3.2. Предел последовательности

Число a называется <u>пределом последовательности $\{x_n\}$</u> (обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ $\exists$ такой номер $N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Геометрически это означает, что какова бы ни была $\varepsilon-$ окрестность точки a, все точки x_n, начиная с номера $N(\varepsilon)+1$, попадут в эту окрестность, а за ее пределами останется лишь конечное число членов последовательности (рис. 3.1).



[redacted]

Рис. 3.1

Последовательность, имеющая конечный предел, называется <u>сходящейся,</u> в противном случае – <u>расходящейся.</u>

<u>Примеры</u>

1. Последовательность $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ сходится к нулю. Действительно, зададим произвольное малое число $\varepsilon > 0$ и выясним, начиная с какого номера $N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Решая его относительно n, получаем $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ означает наименьшую целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Так как $N(\varepsilon)$ определено при любом $\varepsilon > 0$, то тем самым доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ существует и равен 0.

2. Последовательность $\{\sin n\frac{\pi}{2}\}$ не имеет предела, так как, какое бы число a ни взять, при $\varepsilon = \frac{1}{3}$ за пределами окрестности $(a - \frac{1}{3}; a + \frac{1}{3})$ окажется бесконечное число членов последовательности.

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 3.1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 3.2. (Необходимое условие сходимости последовательности.) Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3.3. Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Теорема 3.4. Предел постоянной последовательности равен этой постоянной, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

Теорема 3.5. (Арифметические операции над пределами.) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности. Тогда

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad C = const.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.$

Последовательность, составленная из подмножества членов данной последовательности $\{x_n\}$ в порядке возрастания их номеров, называется подпоследовательностью данной последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 3.6. Если последовательность x_n сходится к числу a, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же числу.

Следствие. Если две подпоследовательности $\{x_n\}$ сходятся к различным пределам, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

Пример. Используя последний результат, легко доказать расходимость последовательности $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$.

Действительно, члены $\{x_n\}$ с четными номерами образуют подпоследовательность $\{1,1,...,1...\}$, предел которой равен 1, а члены с нечетными номерами – $\{-1,-1,...,-1,...\}$, сходящуюся к числу (-1). Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

Теорема 3.7. Две последовательности, отличающиеся между собой на конечное число членов, ведут себя одинаково относительно сходимости, т.е. одновременно сходятся или одновременно расходятся. При этом если они сходятся, то их пределы равны.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \{\cos n\}$ расходится.

Δ Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = A$. Тогда, по теореме 3.7, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+2) = A.$ Учитывая теорему 3.5, получаем:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n + \cos(n+2)) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n + \lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+2) = 2A.$

С другой стороны, используя формулы тригонометрии, имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n + \cos(n+2)) = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cos(n+1)\cdot\cos 1 = 2A\cos 1,$ ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = A.$

Получаем противоречие, ибо $2A \neq 2A \cdot \cos 1.$ ▲

3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется <u>бесконечно малой</u> (б.м.п.), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Обычно члены бесконечно малых последовательностей обозначаются малыми буквами греческого алфавита: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Теорема 3.8. (Свойства б.м.п.)

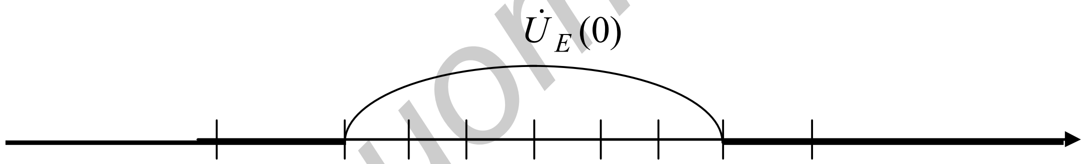
1. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б.м.п. Тогда $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ также б.м.п.

2. Пусть $\{\alpha_n\}$ – б.м.п., а $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Тогда $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ – б.м.п. Другими словами, произведение б.м.п. на ограниченную последовательность есть также б.м.п.

Так, например, последовательность $\{\frac{\sin n}{n}\}$ – б.м.п., так как $\{\frac{1}{n}\}$ – б.м.п., а $\{\sin n\}$ – ограниченная последовательность.

Последовательность $\{x_n\}$ называется <u>бесконечно большой</u> (б.б.п.) (что записывается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$), если для любого сколь угодно большого числа $E > 0$ существует такой номер $N(E)$, что при $\forall\, n > N(E)$ выполняется неравенство $|x_n| > E$.

Геометрически это означает, что в любой сколь угодно большой E-окрестности нуля находится лишь конечное число членов последовательности, а вне ее – бесконечное множество (рис. 3.2).



[redacted]

Рис.3.2

Если начиная с некоторого номера все члены б.б.п. положительны (отрицательны), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Теорема 3.9. (Свойства б.б.п.) Имеют место следующие утверждения:

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$, или символически: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Аналогично $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$, или символически: $\infty + a = +\infty$.

3. $\infty \cdot a = \infty, \quad a \neq 0.$

4. $\infty \cdot \infty = \infty.$

5. Пусть $\{x_n\}$ – б.б.п., тогда $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – б.м.п. И наоборот, если $\{x_n\}$ – б.м.п., то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – б.б.п. Символическая запись:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ называют <u>неопределенностью вида</u> $\dfrac{0}{0}$. Аналогично вводятся неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$.

3.23. Пользуясь определением предела, доказать, что последовательность $\{x_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$ стремится к 1 при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Для $\varepsilon = 0{,}03$ указать соответствующий номер.

Δ Зададим любое (сколь угодно малое) $\varepsilon > 0$ и найдем такое натуральное число $N(\varepsilon)$ (номер последовательности), что все члены последовательности $\{x_n\}$, у которых $n > N(\varepsilon)$, удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$. Для этого решим неравенство относительно n:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Тогда в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, т.е. $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

Если $\varepsilon = 0{,}03$, то $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{0{,}03} - 1\right] = \left[32\dfrac{1}{3}\right] = 32$. Геометрически это означает, что начиная с x_{33} все члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в окрестность радиуса 0,03 точки $x = 1$ (рис.3.3). ▲

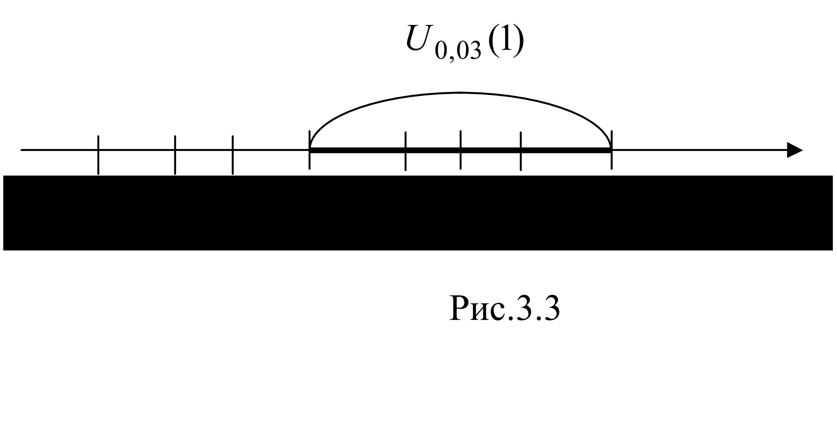


Рис.3.3

3.24. Доказать, что последовательность $\{q^n\}$ (геометрическая прогрессия) является а) б.б.п. при $|q|>1$; б) б.м.п. при $|q|<1$.

Δ а) Пусть $|q|>1$. Докажем, что последовательность $\{q^n\}$ удовлетворяет определению б.б.п., т.е. для $\forall E>0$ $\exists N(E)$, что при $\forall n>N(E)$ выполняется неравенство $\left|q^n\right|>E$.

Зададим произвольное $E>0$. Для отыскания номера $N(E)$ решим последнее неравенство относительно n:

$$|q|^n > E \Leftrightarrow \log_{|q|}|q|^n > \log_{|q|} E \Leftrightarrow n > \log_{|q|} E.$$

Тогда

$$N(E)=\left[\log_{|q|} E\right],$$

что и доказывает данное утверждение.

б) Пусть $|q|<1$. Если $q=0$, то $q^n=0$ при $\forall n \in N$ и, следовательно, $[q^n]$– б.м.п. Пусть $q \neq 0$. Тогда $q^n=\dfrac{1}{(1/q)^n}$. Так как $\left|\dfrac{1}{q}\right|>1$, то последовательность $\left\{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n\right\}$ является б.б.п., а тогда последовательность $\left\{\dfrac{1}{(1/q)^n}\right\}=\{q^n\}$ – б.м.п. в силу теоремы 3.9 (свойство 5).

Таким образом, последовательность $\{q^n\}$ – б.м. при $|q|<1$. ▲

Пользуясь определением предела (т.е. на языке $\varepsilon - N$), доказать, что

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0.$

3.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+3}=2.$

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n}=0.$

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n}{2n+3}=-1.$

3.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+7}{5-2n^2}=-\dfrac{1}{2}.$

3.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{3n+4}=\dfrac{1}{3}.$

3.31*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-1}{2n^2+n-3}=\dfrac{5}{2}.$

3.32*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5\cdot 6^n}{3^n+6^n}=5.$

3.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \quad a>0$.

Доказать, что

3.34*. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3.35*. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P_k(n)}=1$, где $P_k(n)$ – многочлен k-й степени от n с действительными коэффициентами.

3.36. Известно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ – б.б.п. Может ли последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ а) сходиться; б) расходиться, но быть ограниченной; в) быть б.б.п.; г) быть б.м.п. ?

Ответьте на эти вопросы, используя в качестве примеров последовательности: $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\{n\}$.

Докажите по определению (на языке $\varepsilon - N$), что следующие последовательности являются бесконечно малыми:

3.37. $x_n = n^k, \quad k < 0.$ **3.38.** $x_n = (-1)^n \cdot 0.99^n.$ **3.39.** $x_n = \frac{1}{n!}.$

Докажите по определению, что следующие последовательности являются бесконечно большими:

3.40. $x_n = n^k, \quad k > 0.$ **3.41.** $x_n = (-1)^n \cdot n.$ **3.42.** $x_n = 2^{\sqrt{n}}.$

3.43*. Докажите, что последовательность $\{\sin n\}$ расходится.

3.44*. Докажите, что последовательность $\{(1+(-1)^n)\cdot n\}$ неограниченна, но не является б.б.п.

3.4. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

Иногда вызывает затруднение вычисление пределов, связанных с раскрытием неопределенностей. Рассмотрим наиболее важные случаи.

3.4.1. Предел дробно-рациональной последовательности

Дробно-рациональной последовательностью называется отношение двух многочленов $\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где k и m – их степени; $k, m \in N$. Несложно доказать, что предел любого многочлена ненулевой степени равен ∞. Поэтому при вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$ имеем дело с неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрыть ее удается, разделив числитель и знаменатель дроби на старшую из степеней *n.* Покажем это на примерах.

3.45. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n+5}{4n^3-n^2-3}$.

$$\Delta \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n+5}{4n^3-n^2-3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\left|:n^3\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{4-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^3})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}} = \frac{3+0+0}{4-0-0} = \frac{3}{4}. \qquad \blacktriangle$$

3.46. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{4n^5+2n^3-5}$.

$$\Delta\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{4n^5+2n^3-5}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\left|:n^5\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{3}{n^4}+\dfrac{4}{n^5}}{4+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{5}{n^5}}=\frac{0-0+0}{4+0-0}=0. \qquad \blacktriangle$$

3.47. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+5}{2n+4}$.

$$\Delta\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+5}{2n+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\left|:n^2\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Здесь мы использовали связь между б.м.п. и б.б.п. (см. теорему 3.9, п. 5). ▲

Эти же пределы можно найти по-другому, оставляя в числителе и знаменателе только слагаемые со старшей степенью *n,* т.е. главные части, и отбрасывая слагаемые с меньшими степенями. Это – так называемый <u>метод выделения главных частей</u>, который будет подробно рассмотрен дальше. Применим его к вычислению уже рассмотренных пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n+5}{4n^3-n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{4n^3}=\frac{3}{4};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{4n^5+2n^3-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{4n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+5}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty.$$

Теорема 3.10. Имеет место следующее утверждение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0}{b_m n^m+b_{m-1}n^{m-1}+\ldots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_k}, & \text{если } k=m,\\ 0, & \text{если } k<m,\\ \infty, & \text{если } k>m.\end{cases}$$

3.48. Вычислите устно следующие пределы, используя теорему 3.10:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4n-n^4}{3n^2+n+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-3n+2}{7n^3+8n-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-n-2n^2}{1+n-n^2}$.

<u>Ответы</u>: 1) $-\infty$; 2) 0; 3) 2.

3.49. При каком значении a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n-1}{an^2-4n+2}$ равен 1) –1; 2) ; 3) 0?

Δ 1) Данный предел равен –1, если $\dfrac{3}{a}=-1$, т.е. при $a=-3$.

2) Дробь $\dfrac{3n^2+n-1}{an^2-4n+2}$ стремится к ∞, если степень числителя больше степени знаменателя, а это возможно только при $a=0$.

3) Так как степень числителя ни при каком значении a не может быть меньше степени знаменателя, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n-1}{an^2-4n+2} \neq 0$, т.е. данная последовательность не может быть б.м.п. ни при каком $a \in R$. ▲

3.50. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\cdot n!-3(n-1)!}{4(n+1)!-n!}$.

Δ Избавимся от факториалов, входящих в условие. Для этого выразим их через меньший из них, т.е. через $(n-1)!$:

$$n! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}_{(n-1)!}\cdot n = (n-1)!\cdot n,$$

$$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\cdot (n+1) = (n-1)!\cdot n\cdot (n+1).$$

Тогда получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot (n-1)!\cdot n-3(n-1)!}{4(n-1)!\cdot n(n+1)-(n-1)!\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!(2n^2-3)}{(n-1)!(4n^2+4n-n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{4n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}. \qquad ▲$$

3.4.2. Предел дробно-иррациональной последовательности

1. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3.51. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^5+n^2+1}+5n}{4n^2+\sqrt[4]{n^3+n}}$.

Δ Как и в случае дробно-рациональной последовательности, разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень *n,* в данном случае на n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^5+n^2+1}}{n^2}+\dfrac{5}{n}}{4+\dfrac{\sqrt[4]{n^3+n}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}+\dfrac{5}{n}}{4+\sqrt[4]{\dfrac{1}{n^5}+\dfrac{1}{n^7}}}=\frac{0}{4}=0.$$

Заметим, что этот предел можно вычислить проще, оставляя в числителе и знаменателе только старшие степени n. Остальные слагаемые с меньшей степенью n можно отбросить, не изменив при этом предела (<u>метод выделения главных частей</u>):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5+n^2+1}+5n}{4n^2+\sqrt[4]{n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{5/3}}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^{1/3}}=0. \qquad ▲$$

3.52. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.

Δ Этот предел отличается от предыдущих тем, что содержит $\sin n$. Чтобы раскрыть неопределенность, разделим числитель и знаменатель дроби на n. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{\sin n}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}}}=\frac{2+0}{0-1}=-2.$$

Мы здесь воспользовались арифметическими операциями над пределами, а также свойством 2 теоремы 3.8: произведение б.м.п. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ на ограниченную последовательность $\{\sin n\}$ есть б.м.п. ▲

2. Неопределенность вида $(\infty-\infty)$.

Для раскрытия неопределенностей указанного вида исходное выражение преобразуют к виду дроби.

3.53. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+2n-5}-\sqrt{4n^2-n})$.

Δ Дополним данное выражение до разности квадратов, умножив и поделив его на сопряженное выражение. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+2n-5}-\sqrt{4n^2-n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+2n-5})^2-(\sqrt{4n^2-n})^2}{\sqrt{4n^2+2n-5}+\sqrt{4n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{\sqrt{4n^2+2n-5}+\sqrt{4n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+2n}=\frac{3}{4}. \qquad ▲$$

3.54. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-2})$.

Δ Дополним заданное выражение до разности кубов, для чего домножим и разделим его на неполный квадрат суммы. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-2})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+1})^3-(\sqrt[3]{n-2})^3}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n-2)(n+1)}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-(n-2)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n-2)(n+1)}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}=\left(\frac{3}{\infty}\right)=0. \qquad \blacktriangle$$

Заметим, что в некоторых случаях неопределенность раскрывается проще, например:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{9+\frac{1}{n}}-1)=(\infty\cdot 2)=\infty.$$

Этот же пример можно было бы решить, выделяя главные части бесконечно больших:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}(3\sqrt{n}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{n}=\infty.$$

В случае, если главные части б.б.п. в сумме равны нулю (как это было в задачах 3.53 и 3.54), последний способ неприменим.

3.4.3. Предел последовательности, содержащей q^n

В задаче 3.24 доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, & \text{если } |q|<1,\\ \infty, & \text{если } |q|>1.\end{cases}$

Воспользуемся этим утверждением при вычислении следующих пределов.

3.55. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2\cdot 5^n}{4^n+5^n}$.

Δ Последовательности $\{3^n\},\{4^n\},\{5^n\}$ являются б.б.п. при $n\to\infty$, но «быстрее» всех стремится к ∞ последовательность $\{5^n\}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на 5^n, тогда неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ исчезнет:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2\cdot 5^n}{4^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=\frac{0+2}{0+1}=2. \qquad \blacktriangle$$

3.56. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+4+\ldots+2^n}{2^{n+2}+3^{-n}}$.

Δ Числитель дроби есть сумма $n+1$ члена геометрической прогрессии со знаменателем $q=2$. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Тогда

$$1+2+4+...+2^n = \frac{1\cdot(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1}-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}+3^{-n}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n - 1}{4\cdot 2^n + \dfrac{1}{3^n}} = \left|:2^n\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{2^n}}{4+\dfrac{1}{6^n}} = \frac{2-0}{4+0} = \frac{1}{2}. \qquad \blacktriangle$$

3.4.4. Предел показательно-степенной последовательности. Число *e*

Последовательность вида $\{x_n{}^{y_n}\}$, где $x_n > 0$, называется <u>показательно-степенной.</u>

Теорема 3.11. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{}^{y_n} = a^b$.

Теорема 3.12

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{}^{y_n} = +\infty$, или символически

$$a^{+\infty} = +\infty, \quad a > 1.$$

Следующие утверждения запишем в символическом виде:

2) $a^{-\infty} = 0, \quad a > 1, \qquad \left(a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{+\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0\right).$

3) $(+\infty)^{+\infty} = +\infty.$

4) $(+\infty)^{-\infty} = 0.$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $(x_n > 0)$, и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{}^{y_n} = 0$ называют неопределенностью вида 0^0. Аналогично определяются неопределенности вида ∞^0, 1^∞.

Рассмотрим последовательность $\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\} = \{2; 2{,}25; 2{,}37;...\}$, представляющую собой неопределенность вида 1^∞. Как известно, она имеет предел, обозначаемый буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e, \qquad e = 2{,}718281828... \tag{3.1}$$

Теорема 3.13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Тогда последовательность $\left\{(1+\frac{1}{x_n})^{x_n}\right\}$ сходится к числу e, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n} = e. \qquad (3.2)$$

Теорема 3.14. Для любой бесконечно малой последовательности α_n имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e.$ (3.3)

3.57. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n+1}$.

Δ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+5} = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} 2n+1 = \infty$, то имеем неопределенность вида 1^{∞}. Раскроем ее. Для этого преобразуем последовательность так, чтобы можно было воспользоваться теоремами 3.11 и 3.14, другими словами, выделим предел (3.3).

Решение состоит из трех этапов:

1) основание $\frac{n+2}{n+5}$ представляем в виде $1+\alpha_n$, где α_n – б.м.п.;

2) выделяем показатель степени $\frac{1}{\alpha_n}$, обратный к α_n;

3) применяем теоремы 3.11 и 3.14.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n+5}-1\right)^{2n+1} = \left|1^{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{2n+1} = \left|\begin{matrix}\alpha_n = \dfrac{-3}{n+5}\\ \alpha_n \to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{-\frac{n+5}{3}}\right)^{-\frac{3}{n+5}(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{-\frac{n+5}{3}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3(2n+1)}{n+5}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n-3}{n+5}} = e^{-6}. \qquad ▲$$

3.58. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+n-1}\right)^{n^2+2}$.

Δ Этот предел также представляет собой неопределенность вида 1^{∞}. Раскроем ее по той же схеме, что и в задаче 3.57.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+n-1}-1\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7n+8}{3n^2+n-1}\right)^{n^2+2} = \left|\begin{matrix}\alpha_n = \dfrac{8-7n}{3n^2+n-1}\\ \alpha_n \to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-7n+8}{3n^2+n-1}\right)^{\frac{3n^2+n-1}{-7n+8}}\right)^{\frac{-7n+8}{3n^2+n-1}(n^2+2)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-7n+8)(n^2+2)}{3n^2+n-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-7n\cdot n^2}{3n^2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0. \qquad \blacktriangle$$

3.59. При каком $k \in N$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^k+3n^2-5n+1}{2n^3-n^2+7}$ равен 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) ∞?

Ответы: 1) $k=3$; 2) $k<3$; 3) не существует; 4) $k>3$.

Вычислить пределы последовательностей:

3.60. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-1}{n+7}$.

3.61. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{2-4n-6n^2}$.

3.62. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)^2}{2n^3+n-4}$.

3.63. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(1-2n)^3}{3n^2+4}$.

3.64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+2)!}{(n+3)n!+(n+1)!}$.

3.65. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$.

3.66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)\cdot(n-1)!-(n-2)!}$.

3.67. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27n^6-1}+3n}{\sqrt[4]{n^8+n+2}+\sqrt{n}+2}$.

3.68. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n-3}+n^3}{2+\sqrt[3]{8n^3+1}}$.

3.69. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3.70. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2+n^5}-\sqrt{2n^3+5}}{(n+\cos n)\cdot\sqrt{n}}$.

3.71. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$.

3.72. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$.

3.73. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$.

3.74. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n-2}-\sqrt{n^2+n-3})$.

3.75. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3}\cdot(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})$.

3.76. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+2})$.

3.77. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{2+n-n^3})$.

3.78. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1)(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt[3]{n^3+2})$.

3.79. $\lim\limits_{n\to\infty}(4+n)(n-\sqrt[3]{n^3+n^2+3})$.

3.80. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

3.81. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+6\cdot 4^{n+1}}{2^{n-2}-4^n}$.

3.82. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+9+\ldots+3^{n+1}}{2\cdot 3^{n+2}+(-2)^n}$.

3.83. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n-8\cdot 4^{n-1}+2^{-n}}{1+4+16+\ldots+4^n}$.

3.84. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\ldots+\dfrac{1+2^n}{4^n}\right)$.

3.85. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\ldots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

3.86. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

3.87. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

3.88. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+3}\right)^{2-3n}$.

3.89. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{n-4}$.

3.90. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+4}\right)^{n^3}$.

3.91. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-n+3}{2n^2+3n-4}\right)^{2n^3+1}$.

3.92*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$.

Указание: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3.93*. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n\right)$.

3.94*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt{n^2-2n}\right)$.

3.95*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$.

Указание: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

3.96. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cos n+n}{n^2+1}$.

3.97. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\sin n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$.

3.98. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+\cos n}+\sqrt{n^2+1}}{2n-3}$.

3.99. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1/n}+\sin\frac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos\dfrac{1}{n}}$.

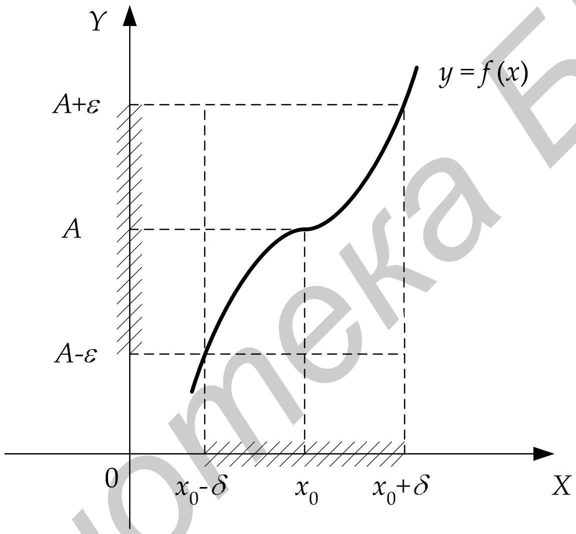
4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

4.1. Предел функции в точке

Укажем два эквивалентных определения предела функции в точке.

Определение 1 (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Геометрически это означает, что для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A на оси OY существует такая проколотая δ-окрестность $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 на оси OX, т.е. множество точек: $U_\delta(x_0) = \{x \in R \ / \ |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$ (рис. 4.1).



Y

Рис. 4.1

Определение 2 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, $(x_n \in D(f))$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A, т.е. из $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Заметим, что точка x_0 может и не принадлежать области определения $D(f)$ функции $f(x)$.

4.1. Доказать, что функция $f(x) = 3x + 4$ при $x \to 1$ имеет предел, равный 7.

Δ Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких значений x из проколотой окрестности точки $x_0 = 1$ выполняется неравенство

$$|f(x) - 7| = |3x + 4 - 7| = 3|x - 1| < \varepsilon .$$

Решая его относительно $|x-1|$, находим: $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Отсюда следует, что если взять окрестность радиуса $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, то при $|x-1|<\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ нужное нам неравенство $|f(x)-7|<\varepsilon$ будет выполнено. Так как $\delta=\delta(\varepsilon)$ находится для любого $\varepsilon>0$, то это означает, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x+4)$ существует и равен 7.

Еще проще решается этот же пример с помощью признака Гейне. В самом деле, для любой последовательности $\{x_n\}\to 1, \quad (x_n \ne 1)$, имеем, в силу теоремы 3.5, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n+4)=7$, что и доказывает данное утверждение. ▲

4.2. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2.$$

Δ Понятие предела функции является локальным, поэтому достаточно рассмотреть данную функцию $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ не на всей числовой оси, а лишь в некоторой окрестности точки $x=4$ (проколотой, разумеется, ибо при $x=4$ $f(x)$ не определена). Выберем в качестве указанной окрестности, скажем, множество точек $M=\{x\,/\;2<x<5,\ x\ne 4\}$.

Зададим некоторое малое число ε, $(0<\varepsilon<1)$, и выясним, при каких x выполняется неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon\ (*)$. Оценим сверху величину $|f(x)-2|$:
$|f(x)-2|=\left|\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|=\left|\dfrac{x+4}{x}-2\right|=\dfrac{|x-4|}{|x|}<\dfrac{|x-4|}{2}$. (Мы воспользовались тем, что из $x\in M \Rightarrow x-4\ne 0$ и $\dfrac{1}{|x|}<\dfrac{1}{2}$.)

Легко видеть, что если $\dfrac{|x-4|}{2}<\varepsilon$, т.е. $|x-4|<2\varepsilon$, то неравенство $(*)$ справедливо. Следовательно, нужное нам неравенство $(*)$ выполняется при всех $x\in\{x\;/\;\;0<|x-4|<\delta\}$, где $\delta\le 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon>0$ может быть произвольно малым, существование предела и его равенство числу 2 доказано. ▲

Аналогично вводится понятие <u>предела функции при стремлении аргумента к бесконечности</u>.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (т.е. во внешности некоторого интервала *(a;b)*). Число A называется пределом $f(x)$ при $x\to\infty$ (обозначается $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ или $A=f(\infty)$), если для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists M(\varepsilon)>0$ такое, что при $\forall x$, для которых $|x|>M$, выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Геометрически тот факт, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, означает, что график $f(x)$ асимптотически приближается к прямой $y = A$ при $x \to \pm\infty$, т.е. эта прямая является <u>горизонтальной асимптотой</u> графика.

<u>Пример</u>. Функция $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ при $x \to \infty$ имеет горизонтальную асипто-ту $y = 0$ (рис. 4.2).

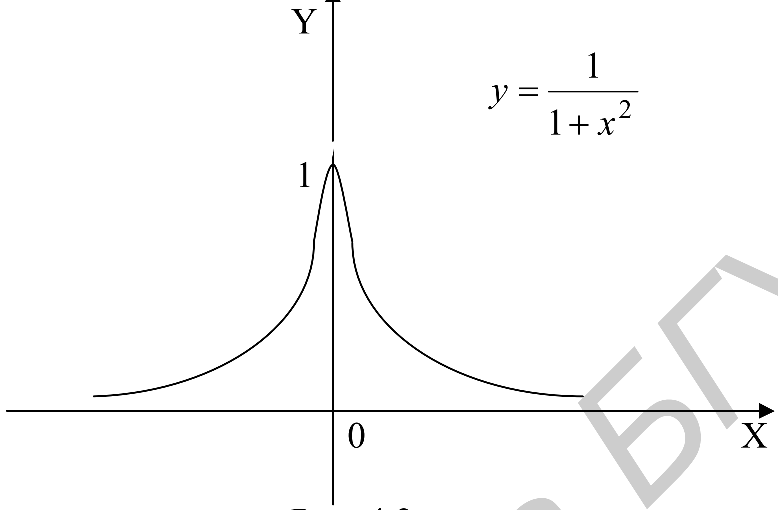


Рис. 4.2

4.3. Доказать, что функция $y = \sin x$ не имеет предела при $x \to \infty$.

Δ Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Чтобы доказать отсутствие данного предела, достаточно указать всего лишь одну б.б. последовательность $\{x_n\}$, для которой соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ расходится. Выберем $\{x_n\} = \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad (n \in N)\right\}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет вид: $\{f(x_n)\} = \sin(\dfrac{\pi}{2} + \pi n) = \{-1, 1, -1, 1, ...\}$ и, как уже было доказано (**п. 3.2**), расходится. Это и доказывает данное утверждение. ▲

Для функций, имеющих предел в точке, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.1. Если функция имеет предел в точке, то он единственен.

Теорема 4.2. Функция, имеющая предел в точке x_0, ограничена в некоторой окрестности $\dot{U}(x_0)$ этой точки x_0.

Теорема 4.3. (Арифметические операции над пределами.)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0. Тогда в этой же точке существуют пределы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} C\,f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\quad C=const$.

Теорема 4.4. (О пределе сложной функции.)

Пусть на множестве X определена сложная функция $Y=f[\varphi(x)]$, являющаяся суперпозицией двух функций $Y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Тогда если в точке $x_0\in X$ существует $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$ и в точке b существует $\lim\limits_{u\to b} f(u)=A$, причем $A=f(b)$, то предел сложной функции существует и равен A, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=A$.

4.2. Односторонние пределы

Если при вычислении предела функции в точке ограничиться рассмотрением только левой или только правой окрестности этой точки, мы получим соответственно левый и правый односторонние пределы функции в этой точке. Левый предел функции $f(x)$ в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, обозначается $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$. Аналогично правый предел той же функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$, обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$.

Пример. Для функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ односторонние пределы в точке $x=0$ равны соответственно $f(-0)=-1$, $f(+0)=1$ (рис. 4.3).

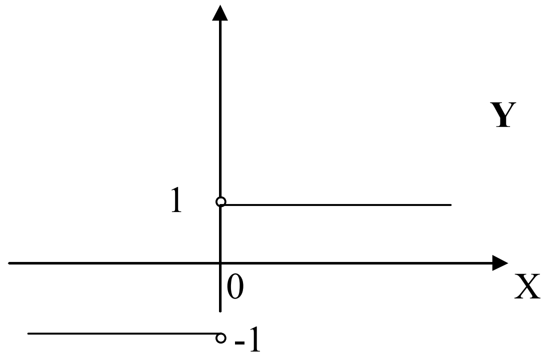


Рис.4.3

Для односторонних пределов справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.5. (Критерий существования предела в точке.)

Если в точке x_0 существуют $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и они равны, то в точке x_0 существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, причем $f(x_0-0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Аналогично вводятся понятия односторонних пределов функции при стремлении аргумента к бесконечности. При этом правый предел, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, обозначается $f(+\infty)=A$, а левый предел, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$, обозначают $f(-\infty)=B$. Геометрически существование пределов $f(+\infty)=A$ и $f(-\infty)=B$ означает, что график функции $y=f(x)$ имеет соответственно <u>правые и левые горизонтальные асимптоты</u> $y=A$ при $x\to+\infty$ и $y=B$ при $x\to-\infty$.

<u>Пример.</u> Функция $y=arctg\,x$ имеет горизонтальные асимптоты $y=\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$ и $y=-\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$ (рис. 4.4).

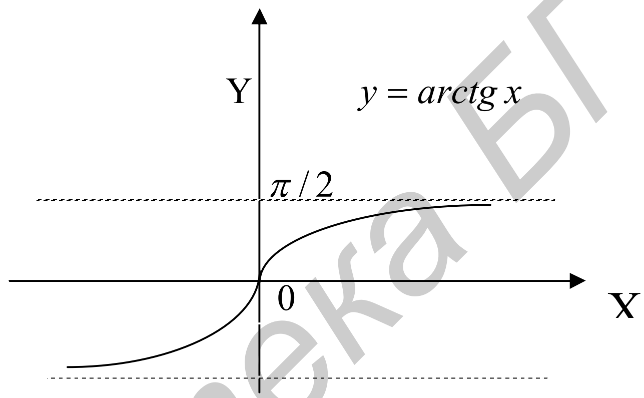


Рис. 4.4

С помощью пределов при $x\to\infty$ вводится также понятие <u>наклонной асимптоты</u> графика.

Если для функции $f(x)$ существуют конечные пределы $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$, то прямая $y=kx+b, (k\neq 0)$, называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$. (При $k=0$ наклонная асимптота становится горизонтальной.) Может случиться, что функция имеет наклонную асимптоту только с одной стороны либо ее правая и левая наклонные асимптоты различны.

<u>Пример</u>. Функция $y=\sqrt{x^2+1}$ (рис. 4.5) имеет наклонные асимптоты $y=x$ при $x\to+\infty$ и $y=-x$ при $x\to-\infty$, ибо

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\pm 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=0 \text{ (рис. 4.5).}$$

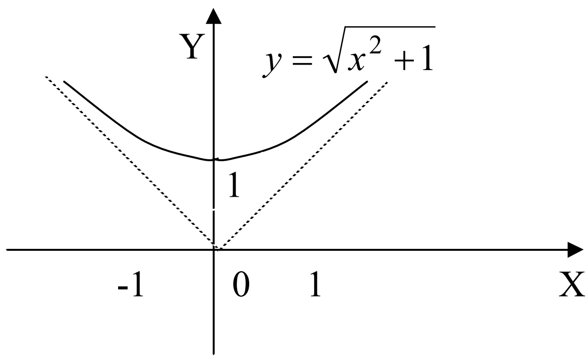


Рис. 4.5

4.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Функция $f(x)$ называется <u>бесконечно малой</u> (б.м.ф.) при $x \to x_0$ (где x_0 – число или символ ∞), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется <u>бесконечно большой</u> (б.б.ф.) при $x \to x_0$ (что записывается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$), если для $\forall E>0$ $\exists\,\delta(E)>0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta(\text{E})$, выполняется неравенство $|f(x)|>\text{E}$. В частности, запись $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ означает, что $\forall E>0$ $\exists\,\delta(E)>0$, что при $\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется $f(x)>\text{E}$. Аналогично определяются понятия: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$.

Геометрически бесконечный предел $f(x)$ в конечной точке x_0 означает, что прямая $x=x_0$ является <u>вертикальной асимптотой</u> графика данной функции.

Например, функция $y=\dfrac{1}{x-1}$ имеет двустороннюю вертикальную асимптоту $x=1$, ибо $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ (рис. 4.6).

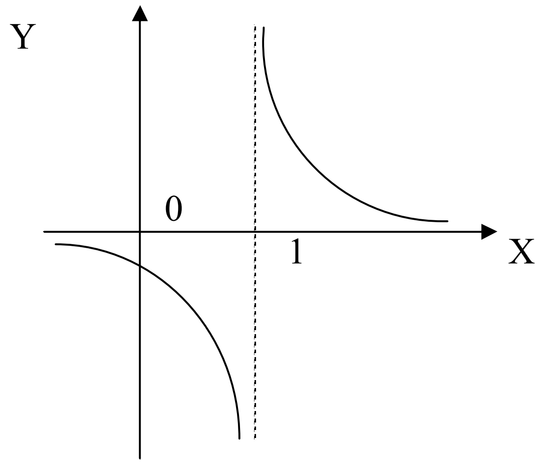


Рис. 4.6

Можно привести примеры функций, обладающих односторонними вертикальными асимптотами. Так, $y=\ln x$ имеет правостороннюю асимптоту $x=0$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции аналогичны по своим свойствам б.м.п. и б.б.п. (см. теоремы **3.8** и **3.9**).

Теорема 4.6

1. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x\to x_0$, то их сумма, разность и произведение , т.е. $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, суть также б.м.ф.

2. Произведение б.м.ф. $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ на ограниченную в $U(x_0)$ функцию $Y(x)$, т.е. $\alpha(x)Y(x)$, есть б.м.ф. при $x\to x_0$.

3. Если $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x\to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б.б.ф. при $x\to x_0$.

Замечание. Частное $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ есть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которая при раскрытии может оказаться равной любому числу, либо ∞, либо вообще не существовать.

4.4. Пусть $x\to x_0$. При каком значении x_0 функция $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2(x+2)}$ является: а) б.м.ф.; б) б.б.ф.?

Δ а) Очевидно, что $f(x)$ – б.м.ф. при $x_0=3$ или $x_0=\infty$, ибо в каждом из этих случаев $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

б) Если $x_0=0$ или $x_0=-2$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ есть б.м.ф. при $x\to x_0$. Тогда, по теореме 4.6. (п.3), имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, т.е. $f(x)$ – б.б.ф. ▲

4.4. Построение графиков функций

С помощью пределов можно выяснять поведение функции с обеих сторон от точек разрыва, находить горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты ее графика.

В задачах **4.5–4.8** сделать схематический чертеж графика функции $y = f(x)$, проведя исследование по следующей упрощенной схеме:

1. Найти область определения $D(f)$ данной функции и точки пересечения ее графика с осями координат.

2. Найти точки разрыва функции и исследовать ее поведение с обеих сторон от каждой из точек разрыва. Для этого вычислить односторонние пределы функции в этих точках. Указать вертикальные асимптоты графика.

3. Выяснить поведение функции при $x \to \pm\infty$, вычислив $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$. Найти горизонтальные и наклонные асимптоты графика.

4. Используя полученные данные, построить эскиз графика.

4.5. Построить график функции $y = \dfrac{x}{x-2}$.

Δ 1. $D(f) = (-\infty;\, 2) \bigcup (2;\, +\infty)$. Точка $O(0;\, 0)$ – единственная точка пересечения графика с осями координат.

2. $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x}{x-2} = \left(\dfrac{2}{-0}\right) = -\infty$, $\qquad \lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x}{x-2} = \left(\dfrac{2}{+0}\right) = +\infty$.

Значит, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции (рис. 4.7).

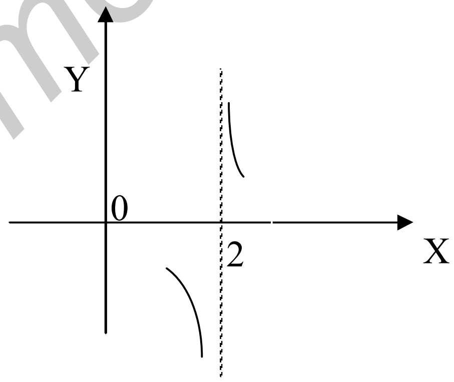


Рис. 4.7

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{1 - 2/x} = 1 \Rightarrow$ прямая $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика при $x \to \pm\infty$.

Строим график функции (рис. 4.8).

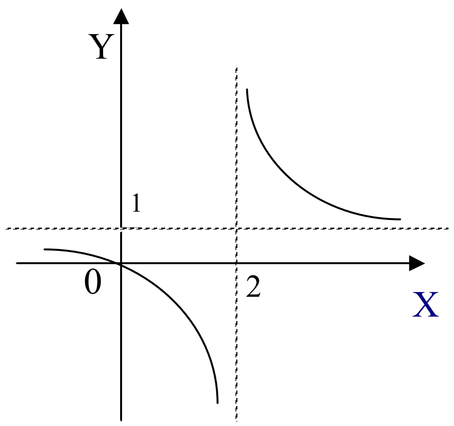


Рис. 4.8

Построенный график есть гипербола, что следует из преобразования:

$$y=\frac{(x-2)+2}{x-2}=1+\frac{2}{x-2}.$$

Его можно было бы построить параллельным сдвигом гиперболы $y=\dfrac{2}{x}$ на две единицы вправо по оси OX и на единицу вверх по оси OY, что полностью согласуется с нашим построением. ▲

4.6. Построить график функции $y=\dfrac{1}{x^2(1-x)}$.

Δ 1. $D(f)=\{x\in R\,|\,x\neq 0,\ x\neq 1\}$.

Очевидно, что точек пересечения графика с осями координат нет.

2. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1}{x^2(1-x)}=\left(\dfrac{1}{+0}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x^2(1-x)}=\left(\dfrac{1}{+0}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x^2(1-x)}=-\infty$. Следовательно, прямые $x=0$ и $x=1$ – двусторонние вертикальные асимптоты графика функции.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2(1-x)}=\left(\dfrac{1}{\infty}\right)=0$ $\Rightarrow$ прямая $y=0$ – горизонтальная асимптота графика. Строим график функции (рис. 4.9).

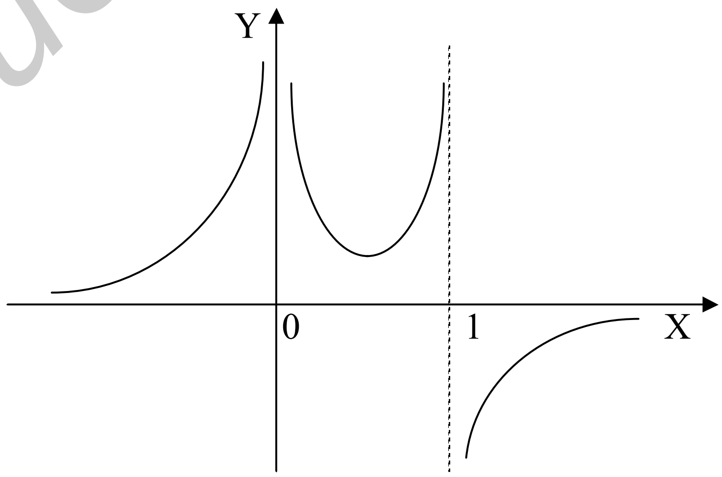


Рис. 4.9

Заметим, что более точно построить график этой функции можно с помощью производной. ▲

4.7. Построить график функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Δ 1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Точек пересечения графика с осями координат нет.

2. $\lim\limits_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = (2^{-\infty}) = 0$, $\lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = (2^{+\infty}) = +\infty$.

Поведение точки в окрестности точки $x = 0$ отражено на рисунке 4.10.

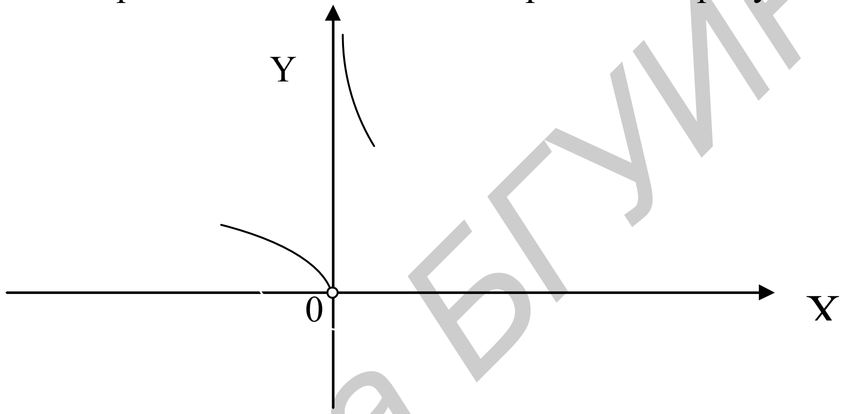


Рис. 4.10

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1 \Rightarrow$ прямая $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика функции.

Строим график функции (рис. 4.11). ▲

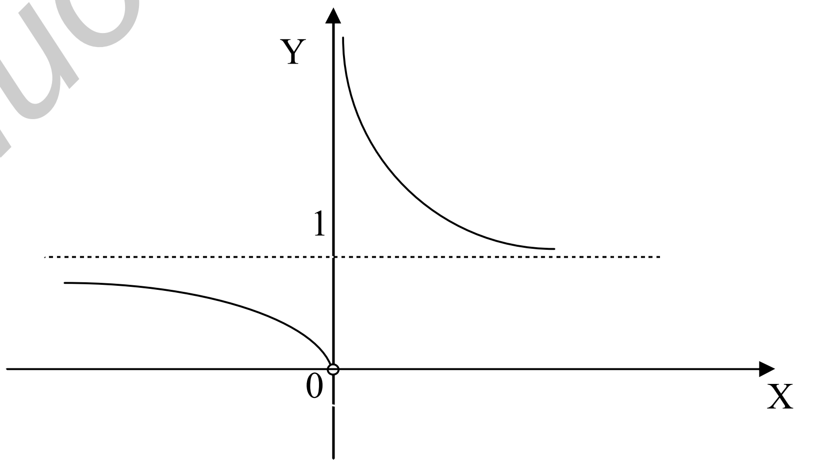


Рис. 4.11

4.8. Построить график функции $y = \dfrac{1 - x^2}{x}$.

Δ 1. $D(f)=(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. При $x=\pm 1 \Rightarrow y=0$, т.е. график функции имеет две точки пересечения с осью *OX*.

2. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1-x^2}{x}=\left(\dfrac{1}{\pm 0}\right)=\pm\infty \Rightarrow$ $x=0$ – двусторонняя вертикальная асимптота графика.

3. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-x^2}{x}=\mp\infty$, то горизонтальных асимптот график не имеет. Выясним, существуют ли наклонные асимптоты. Для этого вычислим пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=-1\Rightarrow k=-1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow b=0.$$

Следовательно, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой графика при $x\to\pm\infty$.

Забегая вперед, заметим, что при всех $x\in D(f)$ функция y является убывающей, так как $y'<0$.

Строим график функции (рис. 4.12). ▲

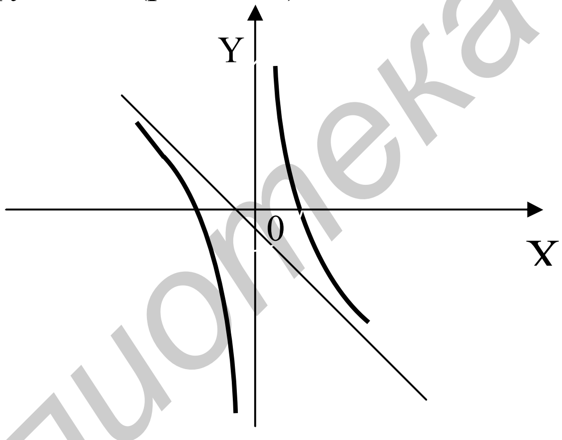


Рис. 4.12

4.5. Вычисление некоторых пределов

4.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ при 1) $x_0=3$; 2) $x_0=-3$; 3) $x_0=\infty$.

Δ 1. Пусть $x\to 3$. Очевидно, что мы имеем здесь неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на общий множитель $(x-3)$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{2}{3}.$$

2. Пусть $x\to -3$, тогда

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\left(\frac{12}{0}\right)=\infty .$$

Здесь мы воспользовались связью между б.м.ф. и б.б.ф. (см. теорему 4.6).

3. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ имеем дело с неопределенностью $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так же, как и при вычислении аналогичного предела числовой последовательности, разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной, т.е. на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1.$$

Заметим, что этот предел можно было вычислить иначе, выделяя главные части многочленов. ▲

4.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+2x-1}{x^3+x+2}$.

Δ Раскрываем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Разложим многочлены в числителе и знаменателе дроби на множители, поделив их на $x+1$ (в общем случае, при $x\to x_0$, на $x-x_0$) по схеме Горнера (можно и «уголком»).

	1	4	2	-1
-1	1	3	-1	0

	1	0	1	2
-1	1	-1	2	0

Тогда имеем:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+3x-1)}{(x+1)(x^2-x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-x+2}=-\frac{3}{4}. \quad ▲$$

4.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{2-x}$.

Δ Для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ преобразуем дробь так, чтобы сократить ее на общий бесконечно малый множитель $x-2$. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(2-x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-6+x}{(2-x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{-(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{-(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = -\frac{1}{2}. \qquad \blacktriangle$$

4.12. Вычислить $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

Δ Заметим, что здесь переменной является h, а не x. Дополним разность кубических корней до разности кубов этих корней. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы. Получим:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Заметим, что предел (4.12) равен значению производной функции $\sqrt[3]{x}$ в точке x, ибо

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \qquad \blacktriangle$$

4.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Δ Этот предел вычислим с помощью замены $t=\sqrt[4]{x}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1} = \begin{vmatrix} \sqrt[4]{x}=t \\ x=t^4 \\ t\to 1 \end{vmatrix} = \lim_{t\to 1} \frac{t^4-t^2}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2(t^2-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} t^2(t+1) = 2. \qquad \blacktriangle$$

4.14. С помощью "$\varepsilon-\delta$"-рассуждений доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. Для $\varepsilon = 0{,}001$ найти $\delta(\varepsilon)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} = 2$. Для $\varepsilon = 0{,}001$ найти $\delta(\varepsilon)$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sin x = 1$. Для $\varepsilon = 0{,}01$ найти $\delta(\varepsilon)$.

4.15. На языке "$\mathrm{E}-\delta$" доказать, что

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Заполнить следующую таблицу.

Е	10	100	1000	10000
δ				

В задачах **4.16–4.41** вычислить пределы.

4.16. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-x}{x^2-4x+3}$.

1) $x_0=-1$; 2) ;

3) $x_0=1$; 4) $x_0=\infty$.

4.17. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4}{3x^2-4x-4}$.

1) $x_0=0$; 2) $x_0=-2/3$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=\infty$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{5x-4-x^2}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^4+x}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{|x+2|}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

4.22*. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; $m,n\in N$.

4.23. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-4}{x^3-x^2+x-6}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-10x-3}{x^3+8x^2+21x+18}$.

4.26*. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{4x+\sqrt[3]{x}}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-x^2}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-\sqrt{3x}}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

4.31. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

4.32. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$.

4.33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{2-\sqrt[3]{x+6}}$.

4.34*. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$; $m,n\in N$.

4.35*. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

4.36*. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

4.37*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

4.38. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x)$.

4.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\,(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt[3]{x^3-2})$.

4.40*. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

4.41*. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

В задачах **4.42–4.61** построить графики функций.

4.42. $y=\dfrac{2}{x(x+1)^2}$.

4.43. $y=-\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$.

4.44. $y=-\dfrac{1}{x(x-3)}$.

4.45. $y=\dfrac{3}{x^2(x+2)}$.

4.46. $y=5^{\frac{1}{x-1}}$.

4.47. $y=3^{\frac{1}{2-x}}$.

4.48. $y=\dfrac{1}{2^x-1}$.

4.49. $y=\dfrac{1}{3-3^x}$.

4.50. $y=\dfrac{2}{3^{1/x}+1}$.

4.51. $y=\dfrac{1}{\lg x}$.

4.52. $y=\dfrac{1}{\log_{1/2} x}$.

4.53. $y=\dfrac{1}{arctg\, x}$.

4.54. $y=arctg\dfrac{1}{x}$.

4.55. $y=\dfrac{1}{1+2^{tgx}}$.

4.56*. $y=2^{\frac{1}{\cos x}}$.

4.57*. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\, arctg\, x^n$.

4.58. $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

4.59. $y=\dfrac{2-x^2}{x+3}$.

4.60. $y=\dfrac{1-x^2}{2+x}$.

4.61. $y=-\dfrac{x^2+3}{x}$.

4.6. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые

Предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (4.1)$$

называется <u>1-м замечательным пределом.</u> Поведение функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ в окрестности точки $x_0=0$ изображено на рис. 4.13.

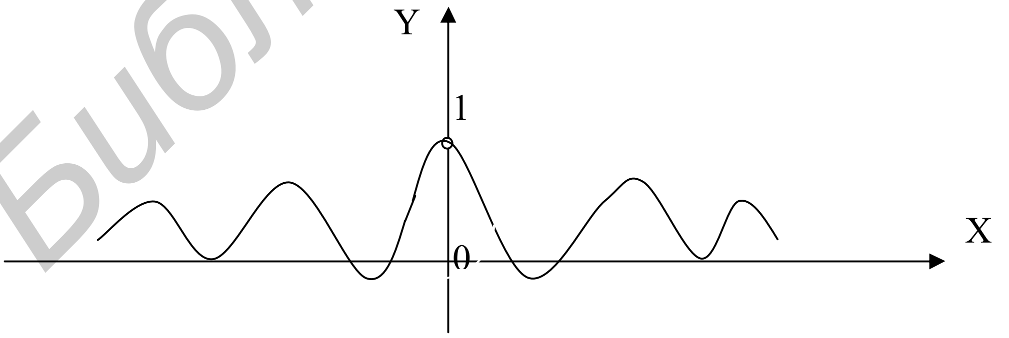


Рис. 4.13

Из формулы (4.1) легко получаем следствия 1-го замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1; \qquad (4.2) \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1; \qquad (4.3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}=1; \qquad (4.4) \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctg\, x}{x}=1. \qquad (4.5)$$

Из теоремы о пределе сложной функции (см. теорему 4.4) следует также, что для любой б.м.ф. $\alpha(x)$ при $x\to x_0$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1. \qquad (4.6)$$

Аналогичное утверждение можно записать для каждого из пределов (4.2)–(4.5). Например:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{tg\,\alpha(x)}{\alpha(x)}=1. \qquad (4.7)$$

В пункте **3.4.4** отмечалось, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ существует и равен числу $e=2{,}71828....$ Можно доказать, что и в случае непрерывного аргумента, $x\in R$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (4.8)$$

Этот предел называется <u>2-м замечательным пределом.</u>

С помощью (4.8) можно доказать справедливость равенств (следствия 2-го замечательного предела):

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e; \qquad (4.9) \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad (4.10)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1; \qquad (4.11) \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}; \qquad (4.12)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad (4.13) \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p. \qquad (4.14)$$

Из теоремы о пределе сложной функции следует, что для любой бесконечно большой при $x\to x_0$ функции $y(x)$

$$\lim_{y(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{y(x)}\right)^{y(x)}=e, \qquad (4.15)$$

а также для любой бесконечно малой при $x\to x_0$ функции $\alpha\ (x)$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e. \qquad (4.16)$$

Аналогичные (4.16) следствия можно получить также из формул (4.10)–(4.14), заменяя в каждой из них x на б.м.ф. $\alpha(x)$.

Введем очень важное в данной теме понятие <u>эквивалентных бесконечно малых.</u>

Две бесконечно малые при $x\to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными (э.б.м.) и обозначают $\alpha(x)\sim\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1. \qquad (4.17)$$

Используя замечательные пределы (4.1), (4.8) и их следствия (4.2)–(4.14), можно составить следующую таблицу э.б.м.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, тогда

1. $\sin\alpha \sim \alpha.$
2. $tg\,\alpha \sim \alpha.$
3. $\arcsin\alpha \sim \alpha.$
4. $arctg\,\alpha \sim \alpha.$
5. $1 - \cos\ \alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}.$
6. $\ln(1+\alpha) \sim \alpha.$
7. $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha.$
8. $\log_a(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1).$
9. $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a.$
10. $(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha.$

В качестве примера докажем соотношения 5 и 10:

1. $\Delta \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \sim 2 \cdot \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha^2}{2}, \qquad (\alpha \to 0)\,.$ ▲

2. Δ Обозначим $\beta = (1+\alpha)^p - 1$. Тогда $\beta \to 0$ при $\alpha \to 0$. Получим $(1+\alpha)^p = 1 + \beta \Rightarrow p\ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta)$. Из свойства 6 следует, что $p\ln(1+\alpha) \sim p\alpha, \quad \ln(1+\beta) \sim \beta$. Тогда $\beta \sim p\alpha$, т.е. $(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha.$ ▲

При нахождении пределов удобно использовать следующую теорему.

Теорема 4.7. (О вычислении пределов с помощью э.б.м.) Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x)$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, т.е. предел отношения двух б.м.ф. равен пределу отношения эквивалентных им функций.

4.62. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin 5x}{tg\,3x}$ при а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \pi$.

Δ В обоих случаях имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

а) Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg\,3x}$ вычислим двумя способами: 1) с помощью 1-го замечательного предела и его следствий; 2) с помощью э.б.м.

1-й способ: а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg\,3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} \cdot \dfrac{3x}{tg\,3x} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3} \lim\limits_{5x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim\limits_{3x \to 0} \dfrac{3x}{tg\,3x} =$

$= \dfrac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{5}{3}.$

2-й способ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg\,3x}=\begin{vmatrix}5x\to 0\Rightarrow \sin 5x\sim 5x\\ 3x\to 0\Rightarrow tg\,3x\sim 3x\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}.$

б) При $x\to\pi$ применять 1-й способ не имеет смысла, т.к. после аналогичных преобразований мы получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Применять 2-й способ при $x\to\pi$ следует с осторожностью, ибо $\sin 5x$ в этом случае не эквивалентен $5x$ (т.к. $5x$ не б.м.ф. при $x\to\pi$), так же как и $tg\,3x$ не эквивалентен $3x$ (!). Чтобы применить таблицу э.б.м., преобразуем данное выражение, перейдя к переменной $\alpha=x-\pi$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{tg\,3x}=\begin{vmatrix}\alpha=x-\pi\Rightarrow x=\alpha+\pi\\ x\to\pi\Rightarrow\alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(5\alpha+5\pi)}{tg\,(3\alpha+3\pi)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 5\alpha}{tg\,3\alpha}=\begin{vmatrix}\sin 5\alpha\sim 5\alpha\\ tg\,3\alpha\sim 3\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=-\lim_{\alpha\to 0}\frac{5\alpha}{3\alpha}=-\frac{5}{3}.\qquad\blacktriangle$$

Замечание 1. При раскрытии неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ в случае, когда $x\to x_0,\ x_0\neq 0,$ целесообразно делать замену $\alpha=x-x_0$ (как это и было сделано в предыдущем примере).

4.63. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{arctg^2\,2x}.$

$$\Delta\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{arctg^2\,2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{arctg^2\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2x\cdot x}{(2x)^2}=-1.\qquad\blacktriangle$$

Замечание 2. Заменять б.м.ф. на э.б.м. в алгебраической сумме нельзя, это может привести к ошибке!

Например, при вычислении $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}$ замена $tg\,x\sim x,\quad \sin x\sim x$ приводит к неверному ответу: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0.$ Однако этот предел не равен нулю. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\begin{vmatrix}\sin x\sim x\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{\cos x\cdot x^3}=\frac{1}{2}.$$

4.64. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{x+4}{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos 4x)^{tg\,x}.$

В обоих случаях имеем неопределенность 1^{∞}. Раскроем ее, выделив число e, т.е. воспользуемся равенством $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e.$

а) $\Delta\ \lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{x+4}{x+1}} = \begin{vmatrix} \alpha = x+1 \Rightarrow x=\alpha-1 \\ x\to -1 \Rightarrow \alpha\to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(3+2(\alpha-1))^{\frac{\alpha-1+4}{\alpha}} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+2\alpha)^{\frac{\alpha+3}{\alpha}} = \left(\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+2\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{\frac{\alpha+3}{\alpha}\cdot 2\alpha} = e^{\lim\limits_{\alpha\to 0} 2(\alpha+3)} = e^6.$ ▲

б) $\Delta\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos 4x)^{tg\, x} = \begin{vmatrix} \alpha = x-\pi/2, & x=\alpha+\pi/2 \\ x\to \pi/2, & \alpha\to 0 \end{vmatrix} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos(4\alpha+2\pi))^{tg(\alpha+\pi/2)} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos 4\alpha)^{-ctg\alpha} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+(\cos 4\alpha-1))^{-\frac{1}{tg\alpha}} = \begin{vmatrix} 1-\cos 4\alpha \sim \dfrac{(4\alpha)^2}{2} \\ tg\,\alpha\sim\alpha \end{vmatrix} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1-8\alpha^2)^{-\frac{1}{\alpha}} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}\left((1-8\alpha^2)^{-\frac{1}{8\alpha^2}}\right)^{\frac{-8\alpha^2}{-\alpha}} = e^{\lim\limits_{\alpha\to 0} 8\alpha} = e^0 = 1.$ ▲

4.65. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$.

Δ Раскрываем неопределенность $\frac{0}{0}$. Вычислим этот предел двумя способами:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right)}{x} = \begin{vmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^x-1\sim x\cdot\ln\frac{3}{2} \\ x\to 0 \end{vmatrix} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\cdot x\ln\frac{3}{2}}{x} = \ln\frac{3}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3^x-1)-(2^x-1)}{x} = \begin{vmatrix} 3^x-1\sim x\cdot\ln 3 \\ 2^x-1\sim x\cdot\ln 2 \end{vmatrix} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln 3 - x\cdot\ln 2}{x} = \ln 3-\ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$ ▲

4.66. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2\frac{x}{2}\cdot\ln(1-\sin 2x)}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}$.

Δ Раскрываем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, пользуясь таблицей э.б.м.:

$arctg^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4},$ так как $\frac{x}{2}\to 0;$

$$\ln(1-\sin 2x) \sim -\sin 2x \sim -2x, \qquad \text{так как} \quad 2x \to 0;$$

$$\sqrt[3]{1-x^3}-1=(1+(-x)^3)^{1/3}-1 \sim -\frac{1}{3}x^3, \qquad \text{так как} \quad -x^3 \to 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{4}\cdot(-2x)}{-\frac{1}{3}x^3}=\dfrac{3}{2}.$ ▲

В задачах **4.67–4.97** вычислить пределы.

4.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi+x)}{arctg\,4x}.$

4.68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{3}}{ctg\,(x-\frac{3}{2}\pi)}.$

4.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x}.$

4.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x+tg\,4x}{\arcsin^2\sqrt{x}}.$

4.71. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(2x-\pi)\,tg\,x.$

4.72. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\,ctg\,3\pi x.$

4.73. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}.$

4.74. $\lim\limits_{x\to -\pi/4}\dfrac{tg\,x+1}{\cos 2x}.$

4.75*. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-ctg^3 x}{2-ctg\,x-ctg^3 x}.$

4.76*. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$

4.77*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}.$

4.78*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}.$

4.79. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{x-2}{3-x}}.$

4.80. $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{3-x}{x+2}}.$

4.81. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{tg^2 3x}.$

4.82. $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{ctg\,\pi x}.$

4.83*. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sin 1/x+\cos 1/x)^x$

4.84*. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}.$

4.85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{x+x^2}.$

4.86. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{9-x^2}{e^{-x}-e^3}.$

4.87. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{\ln x}.$

4.88. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(6-x)}{x^2-5x}.$

4.89. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^3+3)(\ln(x^3+1)-\ln(x^3-1)).$

4.90. $\lim\limits_{x\to \infty}(4x^2-2)(\ln(x^2-1)-\ln x^2).$

4.91*. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}.$

4.92*. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^x-x^3}{x-3}$.

4.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x-x^2}-1)\ln(1-tg^2x)}{\sin 5x^3}$.

4.94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\dfrac{x}{2}(1-e^{\sin x})}{\sqrt[4]{1+2x^2-x^3}-1}$.

4.95. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{e^{\cos x}-e^{\cos 3x}}$.

4.96. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-10^{tg\,\pi x}}{\lg\left(2+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)}$.

4.97*. $\lim\limits_{x\to a\pi}\dfrac{\ln(\cos\dfrac{x}{a}+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x}-a^{a\pi/x-1}}$.

5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

Бесконечно малые функции (б.м.ф.) сравнивают по скорости их стремления к нулю: чем эта скорость выше, тем больший порядок имеет данная б.м.ф. Сравнение скоростей двух б.м.ф. производится с помощью предела их отношения.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две б.м.ф. при $x\to x_0$ (где x_0 – число или символ ∞). Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \qquad (5.1)$$

1. Если предел (5.1) равен постоянному числу $C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют б.м.ф. одного порядка. В этом случае б.м.ф. $\alpha(x)$ эквивалентна б.м.ф. $C\cdot\beta(x)$, т.е. $\alpha(x)\sim C\cdot\beta(x)$ при $x\to x_0$; в частности, при $C=1$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны.

Пример. Функции $\alpha(x)=tg\,3x$ и $\beta(x)=\arcsin 5x$ есть б.м.ф. при $x\to 0$. Найдем предел их отношения в этой точке:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{\arcsin 5x}=\left|\begin{array}{l} tg\,\alpha\sim\alpha \\ \arcsin\alpha\sim\alpha \\ при\quad \alpha\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

Мы видим, что $tg\,3x\sim\dfrac{3}{5}\arcsin 5x$, т.е. б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют один порядок.

2. Если предел (5.1) равен нулю,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0, \qquad (5.2)$$

$\alpha(x)$ называют б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (или говорят, что скорость стремления к нулю $\alpha(x)$ выше, чем $\beta(x)$), и обозначают: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Пример. При $x \to 0$ $\alpha(x) = \sin^3 x$ имеет более высокий порядок, чем $\beta(x) = \ln(1+2x)$, ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{\ln(1+2x)} = \left|\begin{array}{l}\sin\alpha \sim \alpha\\ \ln(1+\alpha)\sim\alpha\\ при\quad \alpha\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x} = 0,$$

т.е. $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Замечание. Если предел (5.1) бесконечен, то $\beta(x) = o(\alpha(x))$, так как

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = 0.$$

3. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется величиной k-го порядка по сравнению с б.м.ф. $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0. \qquad (5.3)$$

В этом случае $\alpha(x) \sim C\beta^k(x)$.

Пример. Бесконечно малая при $x \to 0$ функция $\alpha(x) = e^{\sin^3 x} - 1$ имеет 3-й порядок по сравнению с б.м.ф. $\beta(x) = tg\, x$, т.к.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^3 x}-1}{tg^3 x} = \left|\begin{array}{l}e^{\alpha}-1\sim\alpha\\ tg\,\alpha\sim\alpha\\ при\quad \alpha\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3} = 1.$$

4. Если предел (5.1) не существует, то б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми.

Например, бесконечно малые $\alpha(x) = x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = \sin x$ при $x \to 0$ несравнимы, ибо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует.

Теорема 5.1. Две б.м.ф. при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ является б.м.ф. более высокого порядка, чем каждая из них, т.е.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \gamma(x) = o(\alpha(x)), \quad \gamma(x) = o(\beta(x)).$$

Следствие. Сумма конечного числа б.м.ф. эквивалентна тому слагаемому, которое имеет самый низкий порядок.

Пример. $\sqrt[3]{x-1} + (x-1)^2 + (x-1)^{3/2} \sim \sqrt[3]{x-1}$ при $x \to 1$, ибо порядок первого слагаемого в рассматриваемой сумме по сравнению с $(x-1)$ равен 1/3, тогда как порядки двух других слагаемых равны, соответственно, 2 и 3/2. Следовательно, самый низкий порядок имеет первое слагаемое.

Определение. Главной частью б.м.ф. $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ называется б.м.ф. $\gamma(x) = C(x - x_0)^k$ (где C и k – постоянные), такая, что $\gamma(x) \sim \alpha(x)$. Очевидно, что $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ имеют один порядок малости по сравнению с $(x - x_0)$, равный k.

Пример. Найти главную часть и указать порядок k б.м.ф. $\alpha(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^3 - 1}$ при $x \to 1$ по сравнению с б.м.ф. $(x-1)$.

Δ Преобразуем $\alpha(x)$ следующим образом:
$\alpha(x) = (x-1)\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)} = (x-1)^{4/3} \cdot \sqrt[3]{x^2+x+1}$. Легко видеть, что $\alpha(x) \sim \sqrt[3]{3}(x-1)^{4/3}$, ибо $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2+x+1} = \sqrt[3]{3}$. Отсюда ясно, что главная часть $\alpha(x)$ равна $\sqrt[3]{3}(x-1)^{4/3}$ и $k = 4/3$. ▲

Используя теорему 5.1 и таблицу э.б.м. (см. п. **4.6**), можно получить асимптотические разложения при $x \to 0$ следующих основных элементарных функций.

1. $\sin x = x + o(x)$.
2. $\arcsin x = x + o(x)$.
3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
4. $e^x = 1 + x + o(x)$.
5. $\ln(1+x) = x + o(x)$.
6. $arctg\, x = x + o(x)$.
7. $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$.
8. $tg\, x = x + o(x)$.
9. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$.
10. $a^x = 1 + x\ln a + o(x), \quad (a > 0)$.

Заметим, что символ $o(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

1. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$.
2. $c \cdot o(\alpha) = o(\alpha), \quad c = const$.
3. $o(\alpha) \cdot o(\alpha) = o(\alpha)$.
4. $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$.
5. $o(\alpha) \cdot o(\beta) = o(\alpha\beta)$.
6. $\beta \cdot o(\alpha) = o(\beta\alpha)$.

Бесконечно большие функции сравнивают по скорости их возрастания: чем эта скорость выше, тем большим считается порядок б.б.ф.

Пусть *A(x)* и *B(x)* – б.б.ф. при $x \to x_0$ (где x_0 – число или символ ∞) и существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = C. \tag{5.4}$$

Тогда если $C \neq 0$, то *A(x)* и *B(x)* называются б.б.ф. одного порядка (при $C = 1$ – эквивалентными).

Пример. Величины $A(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ и $B(x) = \dfrac{6x^4}{1-x^2}$ при $x \to 1$ являются б.б.ф. одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{A(x)}{B(x)} = -\dfrac{2}{3}$.

Если $C=\infty$, то *A(x)* называется б.б.ф. более высокого порядка, чем *B(x)*. При $C=0$, напротив, *B(x)* имеет более высокий порядок роста, чем *A(x)*.

Пример. Функция $A(x)=5^x$ является б.б.ф. более высокого порядка, чем $B(x)=3^x$ при $x\to+\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\infty.$

Бесконечно большие при $x\to x_0$ функции *A(x)* и *B(x)* называются несравнимыми, если предел их отношения не существует.

Пример. Бесконечно большие $A(x)=\sqrt[4]{x^4-1}\cdot\cos x$ и $B(x)=x$ при $x\to+\infty$ несравнимы, т.к.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4-1}}{x}\cdot\cos x=\lim_{x\to+\infty}\cos x \text{ не существует.}$$

Величина *A(x)* называется б.б.ф. *k*-го порядка по сравнению с *B(x)*, если *A(x)* и $B^k(x)$ есть б.б.ф. одного порядка, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B^k(x)}=C\neq 0.$

Пример. Величина $A(x)=\dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$ при $x\to\infty$ имеет порядок $k=1/6$ относительно величины $B(x)=x$, ибо $A(x)\sim x^{1/6}=B^{1/6}(x)$.

Главной частью б.б.ф. *A(x)* при $x\to x_0$ называется б.б.ф. $\Gamma(x)$ вида $\dfrac{c}{(x-x_0)^k}$, такая, что $A(x)\sim\Gamma(x)$. Если $x\to\infty$, то главная часть *A(x)* имеет вид $\Gamma(x)=C\cdot x^k$.

Пример 1. Главной частью многочлена при $x\to\infty$ является его старший член, ибо $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\sim a_0x^n$.

Пример 2. Главной частью б.б.ф. $A(x)=\dfrac{1}{x^3}\,arctg\,\dfrac{1}{x}$ при $x\to+0$ равна $\dfrac{\pi}{2x^3}$, т.к. $\lim\limits_{x\to+0}arctg\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, $A(x)\sim\dfrac{\pi}{2x^3}$. Очевидно, что порядок *A(x)* относительно $\dfrac{1}{x}$ равен 3.

В задачах **5.1–5.5,** используя таблицу э.б.м. (см. п. **4.6**), сравните порядки данных бесконечно малых.

5.1. $\alpha(x)=1-\cos x,\quad \beta(x)=x^2,\quad x\to 0.$

Δ Поскольку $\alpha(x)=1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, т.е. $\alpha(x)\sim\dfrac{1}{2}\beta(x)$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. величины одного порядка. ▲

5.2. $\alpha(x)=\ln x,\quad \beta(x)=(x-1)^3$ при $x\to 1.$

Δ Преобразуем $\alpha(x)$: $\alpha(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$.

Из таблицы э.б.м. известно, что $\ln(1+\alpha_1)\sim\alpha_1$ при $\alpha_1\to 0.$ Отсюда следует, что $\ln x\sim x-1$ при $x\to 1$ и, значит, $\alpha(x)\sim\sqrt[3]{(x-1)^3}=\sqrt[3]{\beta(x)}.$ Очевидно, что порядок $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$ равен 1/3. ▲

5.3. $\alpha(x)=\sqrt{x}\cdot\ln(1+tg\,2x),\quad \beta(x)=x$ при $x\to 0.$

Δ Используя таблицу э.б.м., имеем: $\ln(1+tg\,2x)\sim tg\,2x\sim 2x.$ Следовательно, $\alpha(x)\sim 2x^{3/2}$, т.е. порядок $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$ равен 3/2. ▲

5.4. $\alpha(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty.$

Δ Заметим, что $\alpha(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ является б.м.ф. при $x\to\infty$, ибо она равна произведению б.м.ф. $\dfrac{1}{x}$ на ограниченную функцию $\sin x$. Рассмотрим предел отношения: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x.$ Как было доказано (пример 4.3), последний предел не существует. Следовательно, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы. ▲

5.5. $\alpha(x)=\ln(\cos x),\quad \beta(x)=3^{\sin 2x}-1,\quad x\to 2\pi.$

Δ Преобразуем данные функции с помощью замены $x=y+2\pi.$ Тогда, если $x\to 2\pi,$ то $y\to 0.$ Получаем:

$\alpha(x)=\ln(\cos x)=\ln(\cos y)=\ln(1+(\cos y-1)),\quad \beta(x)=3^{\sin 2x}-1=3^{\sin y}-1.$

Пользуясь таблицей э.б.м., получим:

$$\alpha(x)=\ln(1+(\cos y-1))\sim\cos y-1\sim-\frac{y^2}{2}=-\frac{(x-2\pi)^2}{2},\qquad (*)$$

$$\beta(x)=3^{\sin 2y}-1\sim\ln 3\cdot\sin 2y\sim\ln 3\cdot 2y=2\ln 3\cdot(x-2\pi).\qquad (**)$$

Из соотношений (*) и (**) видно, что $\alpha(x)$ есть б.м.ф. 2-го порядка по сравнению с $\beta(x)$. ▲

В задачах **5.6–5.9** определить главную часть $\gamma(x)$ вида $C(x-x_0)^k$ и порядок k б.м.ф. $\alpha(x)$ относительно $(x-x_0)$ при $x\to x_0$.

5.6. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ при $x\to 0.$

Δ Преобразуем заданное выражение, домножив и поделив его на сопряженное для него выражение. Тогда: $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\sim x^2.$ (Мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=1$). Теперь очевидно, что $\gamma(x)=x^2$ и $k=2.$ ▲

5.7. $\alpha(x)=\sqrt[3]{\sin^2(x-1)},\quad x\to 1.$

Δ Из таблицы э.б.м. имеем: $\sin\beta\sim\beta$ при $\beta\to 0$. Учитывая, что $x-1\to 0$ при $x\to 1$, положим $\beta=x-1$. Тогда $\sin(x-1)\sim x-1$ и $\alpha(x)\sim(x-1)^{2/3}$. Очевидно, что $\gamma(x)=(x-1)^{2/3}$ и $k=2/3$. ▲

5.8. $\alpha(x)=\sin 2x-2\sin x,\quad x\to 0.$

Δ Преобразуем заданное выражение так:

$\alpha(x)=2\sin x\cos x-2\sin x=2\sin x(\cos x-1).$

Как видно из таблицы э.б.м., при $x\to 0$ $\sin x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, тогда $\alpha(x)\sim 2x\cdot\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=-x^3$. Следовательно, $\gamma(x)=-x^3$ и $k=3$. ▲

5.9. $\alpha(x)=\sqrt[3]{tg(x^3-1)},\quad x\to 1.$

Δ Из таблицы э.б.м. имеем: $tg\,\beta\sim\beta$ при $\beta\to 0$. Учитывая, что $(x^3-1)\to 0$ при $x\to 1$, получаем: $tg(x^3-1)\sim x^3-1$. Далее, преобразуя $\beta=x^3-1$ по формуле разности кубов, получим: $\beta=(x-1)(x^2+x+1)$. Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$, имеем: $\beta\sim 3(x-1)$ и $\alpha(x)=\sqrt[3]{3(x-1)}$. Теперь очевидно, что $\gamma(x)=\sqrt[3]{3}(x-1)^{1/3}$ и $k=1/3$. ▲

5.10. Сравнить порядки б.б.ф. $A(x)=6x^4+x^3-x+3$ и $B(x)=(2x+1)^3\cdot\sqrt[3]{27x^3-x^2+1}$ при $x\to\infty$.

Δ Вычислим предел отношения данных б.б.ф.:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+x^3-x+3}{(2x+1)^3\cdot\sqrt[3]{27x^3-x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{8x^3\cdot 3x}=\frac{1}{4}.$$

(Мы воспользовались тем, что при $x\to\infty$ любой многочлен эквивалентен своему старшему члену и поэтому $6x^4+x^3-x+3\sim 6x^4$, $(2x+1)^3\sim 8x^3$, $27x^3-x^2+1\sim 27x^3$.) Теперь очевидно, что $A(x)$ и $B(x)$ б.б.ф. одного порядка. ▲

5.11. Пусть $x\to+\infty$. Выделить главную часть $\Gamma(x)$ вида Cx^k и определить порядок роста относительно x следующих функций:

а) $A(x)=\dfrac{x^3+1}{x+2}$; б) $B(x)=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$.

Δ а) Функция $A(x)$ представляет собой отношение двух многочленов. При $x\to+\infty$ имеем: $A(x)\sim\dfrac{x^3}{x}=x^2$. Теперь ясно, что $\Gamma(x)=x^2$ и $k=2$.

б) Функция $B(x)$ представляет собой сумму двух слагаемых, при этом $\sqrt[3]{x^2 - x} \sim x^{2/3}$, т.е. порядки слагаемых относительно x равны соответственно 2/3 и 1/2. В сумме двух б.б.ф. главным является то слагаемое, порядок которого выше. Поскольку 2/3>1/2, то $B(x) \sim x^{2/3}, \Rightarrow \Gamma(x) = x^{2/3}$ и $k = 2/3$.

В справедливости этого результата можно убедиться также, вычислив предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x^{2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3}\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{x^{2/3}} = 1. \qquad \blacktriangle$$

5.12. Пусть $x \to 1$. Выделить главную часть $\Gamma(x)$ вида $C \cdot \dfrac{1}{(x-1)^k}$ и определить порядок k роста относительно $\dfrac{1}{x-1}$ следующих функций:

а) $A(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; б) $B(x) = \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

Δ а) Заменим величину, стоящую в знаменателе $A(x)$, эквивалентной ей при $x \to 1$. Преобразуя знаменатель, получаем:
$\sqrt[3]{1-x^4} = \sqrt[3]{(1-x)(1+x)(1+x^2)} \sim \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{1-x}$ (мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to 1}(1+x)(1+x^2) = 4$). Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$, окончательно имеем:

$A(x) \sim -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x-1}}$. Следовательно, $\Gamma(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} \cdot (x-1)^{1/3}}$ и $k = 1/3$.

б) Из таблицы э.б.м. имеем: $\ln(1+\beta) \sim \beta$ при $\beta \to 0$. Отсюда, полагая $\beta = x - 1$, получаем $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x - 1$. А тогда $B(x) \sim \dfrac{x-1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{x-1}$.

Значит, $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x-1}$ и $k = 1$. $\blacktriangle$

В задачах **5.13–5.20** сравните порядки бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$:

5.13. $\alpha(x) = e^{2x} - 1, \quad \beta(x) = 100x, \quad x \to 0$.

5.14. $\alpha(x) = \dfrac{13}{x}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)}, \quad x \to +\infty$.

5.15. $\alpha(x) = (x-1)(2-x-x^2), \quad \beta(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad x \to 1$.

5.16. $\alpha(x) = \arcsin x, \quad \beta(x) = tg\,\dfrac{\pi x}{2}, \quad x \to 0$.

5.17. $\alpha(x) = x^2 \cdot \sin^2 x, \quad \beta(x) = x \cdot tg\, x, \quad x \to 0$.

5.18. $\alpha(x) = \ln^2 \cos x, \quad \beta(x) = 5^{\sin 2x} - 1, \quad x \to 2\pi.$

5.19. $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^4}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{x^6}, \quad x \to \infty.$

5.20. $\alpha(x) = x^3 - 3x - 2, \quad \beta(x) = x^2 - x - 2, \quad x \to -1.$

В задачах **5.21–5.29** найдите главную часть $\gamma(x)$ вида $C(x - x_0)^k$ и порядок малости k б.м.ф. $\alpha(x)$ относительно б.м.ф. $(x - x_0)$ при $x \to x_0$:

5.21. $\alpha(x) = 3\sin^2 2x - x^5, \quad x \to 0.$

5.22. $\alpha(x) = x \cdot \ln(1 - 2x + x^2), \quad x \to 0.$

5.23. $\alpha(x) = e^{\sqrt{x} - 1} - 1, \quad x \to 1.$

5.24*. $\alpha(x) = 1 - \cos(1 - \cos\dfrac{1}{x}), \quad x \to \infty.$

5.25. $\alpha(x) = \cos x - 1 + \sin^2 2x + \arcsin^2 x + arctg\, 2x^2, \quad x \to 0.$

5.26. $\alpha(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2, \quad x \to 0.$

5.27. $\alpha(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad x \to +0.$

5.28. $\alpha(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x^2}, \quad x \to 0.$

5.29. $\alpha(x) = \sin 3x - tg 3x, \quad x \to 2\pi.$

В задачах **5.30–5.45** определите порядок малости k б.м.ф. $\alpha(x)$ по сравнению с x при $x \to 0$:

5.30. $\alpha(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^5.$

5.31*. $\alpha(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^2 - 2.$

5.32. $\alpha(x) = 1 - x^4 - \cos x^2.$

5.33. $\alpha(x) = 2\sin x - tg\, 2x.$

5.34. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 9} - 3).$

5.35. $\alpha(x) = 2^{x^3} - 1.$

5.36. $\alpha(x) = 5^{\sin^2 x} - 1.$

5.37. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}.$

5.38. $\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4.$

5.39. $\alpha(x) = \dfrac{1}{1 + x} - (1 - x).$

5.40. $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{5x^2 \sqrt{3\sin x^{10}}}).$

5.41. $\alpha(x) = 3\sin^{5/2} x - 4x \cdot tgx \cdot \sqrt[3]{x^2}.$

5.42. $\alpha(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^3} + 2\sqrt[3]{x}}{10 + 7x}.$

5.43. $\alpha(x) = 5 \cdot e^{4\sin 2x\sqrt{x}} - 5.$

5.44. $\alpha(x) = 6\, arctg\,(\sqrt{4 + x} - 2).$

5.45. $\alpha(x) = 1 - \cos^3 2x.$

В задачах **5.46–5.54** доказать или опровергнуть утверждения при $x \to 0$:

5.46. $\sin x^3 = o(x^2).$

5.47. $x^2 = o(x).$

5.48. $x^3 = o(x^5)$.

5.49. $3\sin^2 x - 5x^5 = o(x^2)$.

5.50. $\sin(\sqrt{x^2+9} - 3) = o(x^3)$.

5.51. $\sqrt{4 - x^4} + x^2 - 2 = o(x^2)$.

5.52*. $\sqrt{x + \sqrt{x}} = o(\sqrt[4]{x})$.

5.53. $\ln(1+x^2) = o(tg\, x)$.

5.54*. $\sin 2x + 2arctg\, 3x + 3x^5 = o(\ln(1+3x+\sin^2 x) + x^{1/8} \cdot e^x)$.

5.55. Пусть $x \to 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n \ge k$. Показать, что
1) $o(x^n) + o(x^k) = o(x^k)$; 2) $o(x^n) \cdot o(x^k) = o(x^{n+k})$.

5.56. Укажите верные асимптотические равенства:

а) $\sin 2x = 2x + o(2x)$, $x \to 0$;

б) $x^2 + x = x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$;

в) $x^2 + x = x + o(x)$, $x \to 0$;

г) $x^2 + x = x + o(x^2)$, $x \to \infty$;

д)* $\sin 2x + 2arctg\, 3x + 3x^2 = 8x + o(x)$, $x \to 0$.

В задачах **5.57–5.61** сравните порядки б.б.ф. $A(x)$ и $B(x)$ при $x \to x_0$:

5.57. $A(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $B(x) = 2x^3 + 2x - 1$ при $x \to \infty$.

5.58. $A(x) = x(ax+b)(cx+d)$, $B(x) = bx^3 + dx$, $a, b, c \ne 0$, при $x \to \infty$.

5.59. $A(x) = \dfrac{2x^4}{x-9}$, $B(x) = \dfrac{10x^5}{x^3+16}$ при $x \to \infty$.

5.60. $A(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x}$, $B(x) = \sqrt{x}$ при $x \to \infty$.

5.61. $A(x) = \dfrac{13}{x}$, $B(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ при $x \to 0$.

В задачах **5.62–5.66** определите порядок роста б.б.ф. $A(x)$ по отношению к б.б.ф. $B(x)$ при $x \to x_0$:

5.62. $A(x) = \dfrac{x^4}{(x^2-1)^2}$, $B(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \to 1$.

5.63. $A(x) = \dfrac{x}{(2-x)^2}$, $B(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \to 2$.

5.64. $A(x) = \sqrt{1+x+x^4}$, $B(x) = x$, $x \to \infty$.

5.65. $A(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $B(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \to 1-0$.

5.66. $A(x) = ctg^2 x^3$, $B(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$.

В задачах **5.67–5.69** найдите главную часть $\gamma(x)$ вида $C \cdot x^k$ следующих функций:

5.67. $A(x) = 3x + x^2 - x^3$ при а) $x \to 0$; б) $x \to \infty$.

5.68. $A(x) = (4x^3 + x^2 - x)^2$ при а) $x \to 0$; б) $x \to \infty$.

5.69. $A(x) = \sqrt{x^8 - 3x^6 + x}$ при а) $x \to 0$; б) $x \to \infty$.

6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

6.1. Непрерывность функции в точке

Понятие непрерывности функции является одним из важнейших в математическом анализе. Рассмотрим три взаимно эквивалентных определения непрерывности функции в точке.

Будем предполагать, что данная функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ рассматриваемой точки x_0.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 (или при $x = x_0$), если в этой точке существует предел функции, совпадающий со значением функции в этой точке, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.1}$$

Следующее определение называют определением «на языке приращений».

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке отвечает бесконечно малое приращение функции, т.е. из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, где $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – соответствующее ему приращение функции.

Наконец, третье определение является следствием (6.1) и свойств односторонних пределов.

Определение 3. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если в этой точке существуют оба односторонних предела функции, равные $f(x_0)$, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0). \tag{6.2}$$

Если же соотношение (6.1) нарушено, то говорят, что в точке x_0 (или при $x = x_0$) функция имеет разрыв. В частности, функция, не определённая в точке x_0, очевидно, разрывна в ней.

6.1. Доказать, что $f(x) = \sin x$ непрерывна при любом $x_0 \in R$.

Δ Отметим, что $f(x)=\sin x$ определена на всей числовой оси. Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. Очевидно, что

$$\left|\sin x-\sin x_0\right|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le\left|x-x_0\right|<\varepsilon \text{ (ибо } \left|\sin\alpha\right|\le\left|\alpha\right| \text{ и } \left|\cos\alpha\right|\le 1).$$

Значит, при любом $\varepsilon>0$ выполняется $\left|\sin x-\sin x_0\right|<\varepsilon$, если $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ и, таким образом, данная функция непрерывна в точке x_0. ▲

6.2. Показать, что $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна при любом $x_0>0$.

Δ Замечаем, что данная функция определена при всех $x>0$.

Пусть $\Delta x=x-x_0$ – некоторое приращение аргумента $(x>0)$ и $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$ – соответствующее ему приращение функции. Тогда

$$\left|\Delta y\right|=\left|\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right|=$$

$$=\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\frac{\left|\Delta x\right|}{\sqrt{x_0}}\to 0$$ при $\Delta x\to 0$. Тем самым доказана непрерывность функции в точке x_0. ▲

6.3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Δ Данная функция определена при всех $x\in R$. Отметим, что она не относится к числу элементарных, так как не может быть получена путем суперпозиций (т.е. взятием функции от функции) из основных элементарных функций.

Совершенно ясно, что функция непрерывна при всех $x>0$, ибо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}2x=2\cdot\lim\limits_{x\to x_0}x=2x_0$, если $x_0>0$. Аналогично доказывается непрерывность $f(x)$ при всех $x<0$. Сомнение вызывает лишь точка «стыка» $x=0$. Выясним, чему равны односторонние пределы функции при $x\to 0$: $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}2x=0$; $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}(-x)=0$. Мы видим, что $f(+0)=f(-0)=f(0)$. Следовательно, функция непрерывна и в точке $x_0=0$ и, значит, непрерывна при всех x. ▲

6.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\frac{1}{\sin x}.$$

Δ Данная функция не определена в тех точках, где знаменатель дроби равен нулю, то есть при $x=k\pi$, где $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$. Следовательно, они являются ее точками разрыва.

В остальных точках функция непрерывна, ибо, используя арифметические операции над пределами, получаем при $x \neq k\pi$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \sin x} = \frac{1}{\sin x_0} = f(x_0).$$

Итак, $f(x)$ непрерывна при всех x, кроме $x = k\pi, k \in Z$. ▲

6.2. Односторонняя непрерывность

Если рассматривать функцию только в правой или левой окрестности данной точки, то можно говорить об односторонней непрерывности.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если она определена в некоторой правой окрестности $[x_0; x_0 + \delta]$ $(\delta > 0)$ этой точки и $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (рис. 6.1).

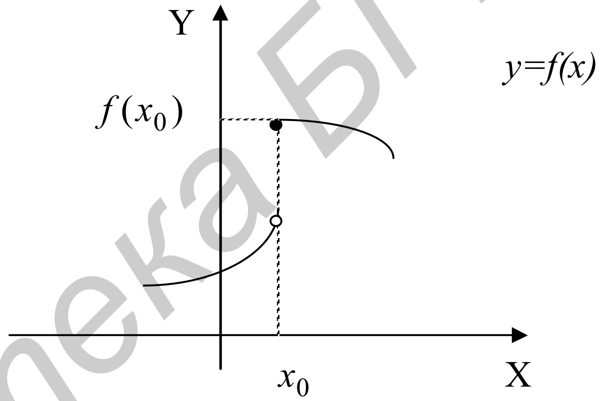


Рис. 6.1

Совершенно аналогично определяется непрерывность в точке x_0 слева (рис. 6.2).

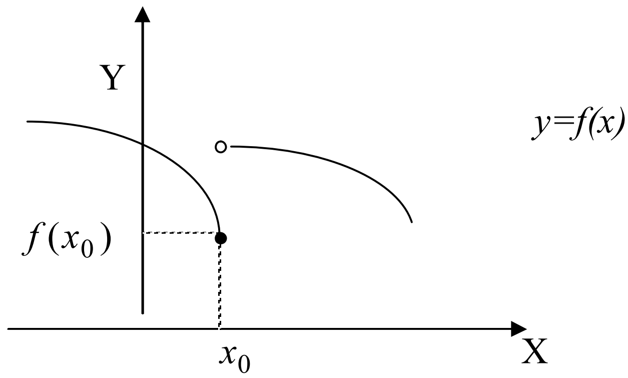


Рис. 6.2

Теорема 6.1. (Критерий непрерывности функции в точке.)

Функция, определенная в окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, непрерывна в этой точке тогда и только тогда, когда она непрерывна в ней слева и справа.

6.5. Найти значения *a* и *b*, при которых функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+a, & если\ x>0,\\ 1, & если\ x=0,\\ b-\cos x, & если\ x<0,\end{cases}$$

в точке $x=0$:

1) непрерывна справа; 2) непрерывна слева;
3) просто непрерывна (т.е. непрерывна с обеих сторон).

Δ Вычислим односторонние пределы $f(x)$ в точке $x=0$:

$f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}(\sin x+a)=a;$ $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}(b-\cos x)=b-1.$ Учитывая, что $f(0)=1$, приходим к выводам:

1) $f(+0)=f(0)\Rightarrow a=1;$ 2) $f(-0)=f(0)\Rightarrow b-1=1\Rightarrow b=2;$
3) $f(+0)=f(-0)=f(0)\Rightarrow a=1,\quad b=2.$

Ответы: 1) $a=1,\ b\in R;$ 2) $a\in R,\ b=2;$ 3) $a=1,\ b=2.$

Будем считать доказанным утверждение: **любая из основных элементарных функций** ($\sin x, \cos x, tg\, x, ctg\, x, a^x, \log_a x$ и т.д.) **непрерывна в каждой точке своей области определения**.

6.3. Свойства функций, непрерывных в точке

Теоремы о непрерывных функциях следуют из соответствующих теорем о пределах функций.

Теорема 1.(Арифметические операции над непрерывными функциями.) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма, разность, произведение и частное также непрерывны в этой точке (последнее при условии, что знаменатель дроби не обращается в нуль в рассматриваемой точке).

Пример 1. Многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, как легко следует из теоремы 1, непрерывен при любом $x\in R.$

Пример 2. Рациональная функция $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывна при всех $x\in R$, для которых $Q_m(x)\neq 0.$

Теорема 2. (Непрерывность сложной функции.) Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$, являющаяся суперпозицией (наложением) двух данных, непрерывна в точке x_0.

Пример 3. Функция $u = \sin x$ непрерывна при всех $x \in R$, а функция $y = e^{1/u}$ непрерывна при всех $u \neq 0$. Тогда, в силу теоремы 2, сложная функция $y = e^{1/\sin x}$ непрерывна в тех точках, где $u = \sin x \neq 0$, т.е. при всех $x \in R, x \neq k\pi \quad (k \in Z)$.

Из данной теоремы следует, что любая элементарная функция непрерывна в области своего определения (напомним, что элементарной называется функция, получающаяся конечным числом суперпозиций из основных элементарных).

Пример 4. Функция $y = 2^{\cos^5(tg\, x)}$ непрерывна при всех $x \in R, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, так как является суперпозицией четырех основных элементарных функций: $y = 2^u, u = v^5, v = \cos t, t = tg\, x$, определённых при всех значениях аргументов, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Пример 5. Функция $y = \begin{cases} \sin x, x \geq 0, \\ \cos x, x < 0, \end{cases}$ не относится к числу элементарных. Легко видеть, что она определена на всей числовой оси, однако имеет разрыв в точке $x = 0$ (рис. 6.3).

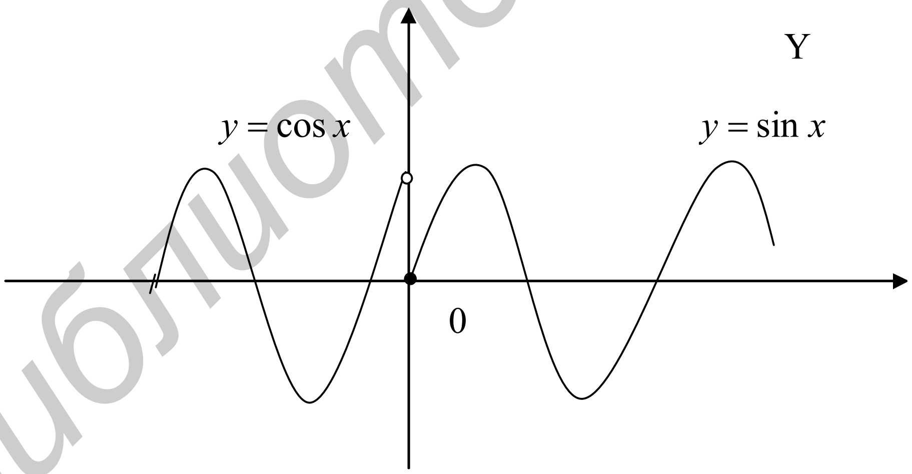


Рис. 6.3

6.4. Непрерывность функции на интервале и отрезке

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и, кроме того, в точке $x = a$ непрерывна справа, а в точке $x = b$ – непрерывна слева.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом важных свойств.

Теорема 1. (О наименьшем и наибольшем значениях.) Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, такие, что $f(x_1) = m$ – наименьшее, $f(x_2) = M$ – наибольшее значения $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 6.4).

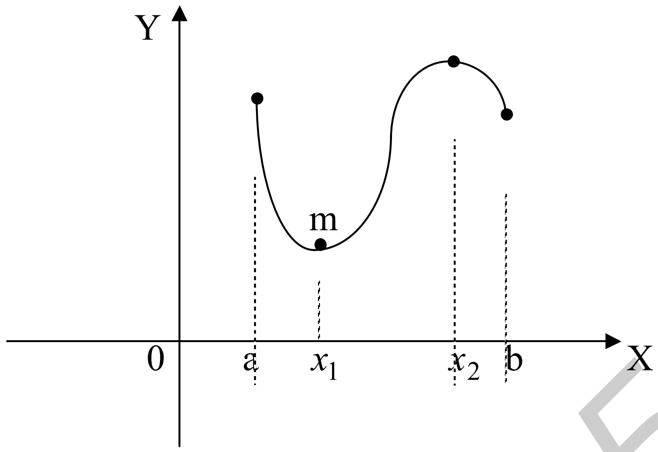


Рис. 6.4

Теорема 2. (Ограниченность непрерывной функции.) Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Это утверждение является следствием предыдущей теоремы, ибо для всех $x \in [a;b]$ **выполняется:** $m \le f(x) \le M$.

Теорема 3. (О промежуточных значениях.) Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения: $f(a) = A,\ f(b) = B,\ A \ne B,$ то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B. Геометрически это означает, что прямая $y = C$ (где C – это любое значение между A и B) хотя бы в одной точке пересекает график данной функ- ции на этом отрезке (рис. 6.5).

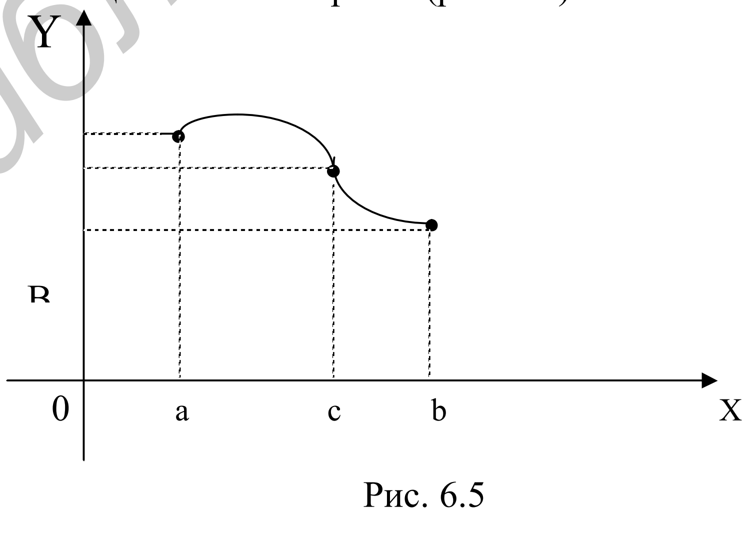


Рис. 6.5

Теорема 4. (<u>О прохождении через нуль.</u>) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри отрезка найдётся точка *c*, хотя бы одна, в которой функция обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрически это означает, что непрерывная кривая, соединяющая точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, лежащие по разные стороны от оси Ох, непременно пересекает ось Ох (рис. 6.6).

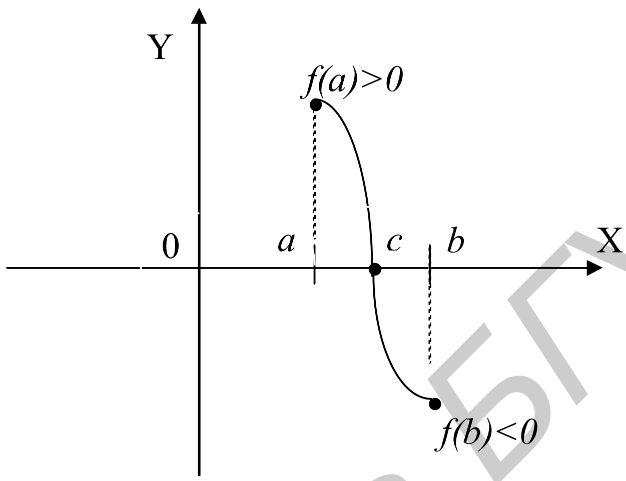


Рис.6.6

На данной теореме основан так называемый «<u>метод половинного деления</u>». С его помощью не только устанавливается существование на $[a;b]$ корня функционального уравнения $f(x) = 0$ (где $f(x)$ – непрерывная на $[a;b]$ функция), но и приближенно вычисляется этот корень с любой заданной точностью ε.

<u>Алгоритм решения задачи</u> следующий.

1. Подбираем отрезок $[a_1;b_1] \in [a;b]$, по возможности небольшой длины, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Тогда, по теореме 4, на интервале $(a_1;b_1)$ имеется корень данного уравнения. Берем середину отрезка за первое приближение корня, т.е. $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Если $|a_1 - b_1| \le \varepsilon$, то вычисление корня закончено и значение корня $c \approx c_1$.

2. Допустим, что $|a_1 - b_1| > \varepsilon$. Рассматриваем отрезки $[a_1;c_1]$ и $[c_1;b_1]$ и выбираем тот из них, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Обозначаем этот отрезок $[a_2;b_2]$ и применяем к нему предыдущие рассуждения. Середину отрезка $c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ берем за второе приближение корня. Если $|a_2 - b_2| \le \varepsilon$, то процесс вычисления закончен. И так далее.

3. На k-м этапе получаем: $c \approx c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, при условии , что $|a_k - b_k| \le \varepsilon$.

6.6. Вычислить приближенно корень уравнения $x \cdot 2^x = 1$ на отрезке [0;1] с точностью 0,3.

Δ 1. Преобразуем данное уравнение к виду: $f(x) = x \cdot 2^x - 1 = 0$. Тогда $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, т.е. $f(0) \cdot f(1) < 0$. Значит, на (0;1) непременно есть корень данного уравнения. Обозначим его через c. За первое приближение корня берем середину отрезка [0;1], т.е. $c \approx c_1 = \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$.

2. Вычисляем $f(0{,}5) = 0{,}5 \cdot 2^{0{,}5} - 1 \approx -0{,}3$. Заметив, что $f(0{,}5) \cdot f(1) = -0{,}3 \cdot 1 < 0$, за второе приближение корня берем середину отрезка [0,5;1], т.е. $c \approx c_2 = \dfrac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$.

3. Находим $f(0{,}75) = 0{,}75 \cdot 2^{0{,}75} - 1 \approx 0{,}26$. Легко видеть, что $f(0{,}5) \cdot f(0{,}75) < 0$. Тогда за c_3 примем середину отрезка [0,5;0,75], т.е. $c_3 = \dfrac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = 0{,}625$. Учитывая, что длина последнего рассматриваемого отрезка [0,5;0,75] равна 0,25, заключаем, что мы нашли приближенное значение корня данного уравнения на отрезке [0;1] с точностью 0,25 < 0,3.

Ответ: $c \approx 0{,}625$. ▲

6.7. Показать, что любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Δ Пусть данный многочлен имеет вид $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 > 0$ и $n \in N$ – нечетное число. Преобразуем многочлен следующим образом: $P_n(x) = x^n (a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n})$. Поскольку то $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = -\infty$. Отсюда следует, что найдется такое число A, что $P_n(x) > 0$ при $x \ge A$ и $P_n(x) < 0$ $x \le -A$. Но тогда $P_n(-A) \cdot P_n(A) < 0$. Применяя теорему 4 к функции $P_n(x)$ на отрезке [$-A;A$], заключаем, что между $-A$ и A непременно имеется точка C, в которой $P_n(C) = 0$, что и доказывает данное утверждение.

Случай $a_0 < 0$ легко сводится к рассмотренному. ▲

6.8. Найти корень уравнения $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ с точностью до 0,1.

Δ 1. Обозначим $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. Замечаем, что $f(0) = -1$, $f(1) = 3$, т.е. $f(0) \cdot f(1) < 0$ и, значит, на интервале (0;1) имеется корень уравнения. За первое приближение корня берем $c_1 = \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$.

2. Убедившись, что $f(0)\cdot f(0{,}5)=-1\cdot\frac{3}{2}<0,$ получаем: $c_2=\frac{0+0{,}5}{2}=0{,}25.$

3. Поскольку $f(0)\cdot f(0{,}25)=-1\cdot 0{,}328<0,$ находим: $c_3=\frac{0+0{,}25}{2}=0{,}125.$

4. Убедившись, что $f(c_2)\cdot f(c_3)<0,$ получаем
$c_4=\frac{c_2+c_3}{2}=\frac{0{,}25+0{,}125}{2}=0{,}1875.$

5. Убедившись, что $f(c_3)\cdot f(c_4)<0,$ находим
$c_5=\frac{c_3+c_4}{2}=\frac{0{,}125+0{,}1875}{2}=0{,}156.$ Поскольку $|c_3-c_4|=0{,}0625<0{,}1,$ на этом этапе процесс вычисления заканчиваем.

Ответ: $c\approx 0{,}156.$ ▲

6.9. Показать, что уравнение $x\sin x-0{,}5=0$ имеет бесконечное множество решений.

Δ Обозначим $f(x)=x\cdot\sin x-0{,}5.$ Легко видеть, что $f(0)=-0{,}5<0,$ $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-0{,}5>0,$ т.е. $f(0)\cdot f(\frac{\pi}{2})<0.$ Следовательно, в силу теоремы 4, на интервале $(0;\frac{\pi}{2})$ имеется корень уравнения. Рассмотрим теперь отрезок $I_k=\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right],$ где $k\in N.$ Имеем $f(2\pi k)=-0{,}5<0,$ $f(\frac{\pi}{2}+2\pi k)=\frac{\pi}{2}+2\pi k-0{,}5>0,$ т.е. внутри каждого из отрезков I_k содержится корень уравнения. А поскольку этих отрезков бесконечно много, то и уравнение имеет бесчисленное множество решений. ▲

6.5. Точки разрыва и их классификация

Рассмотрим функцию $f(x),$ определенную в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0, а в самой точке – необязательно. Как уже отмечалось ранее, те точки, в которых функция не является непрерывной, называются ее точками разрыва. Иначе говоря, если x_0 – точка разрыва $f(x),$ то в ней по какой-либо причине нарушено равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В зависимости от причин такого нарушения различают разрывы 1-го и 2-го родов.

1. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(x),$ если в этой точке функция имеет конечные пределы слева и справа:

$$\underline{\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A}, \quad \underline{\lim_{x\to x_0+0} f(x)=B}.$$

Разрывы 1-го рода делятся на <u>устранимые</u> и <u>неустранимые.</u>

а) Если $A=B$, то разрыв 1-го рода называют <u>устранимым.</u> В этом случае пределы функции слева и справа равны и, следовательно, существует и двусторонний предел, равный A: $\underline{\lim_{x\to x_0} f(x)=A}$. Такой разрыв легко устранить, доопределив функцию при $x=x_0$ значением $f(x_0)=A$ (если она не была определена в точке x_0) либо изменив значение функции в точке x_0 на A (если она была определена не так). В таком случае говорят, что функция «доопределена до непрерывности».

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим две функции:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x_0\neq 0, \\ -1, & x_0=0. \end{cases}$$

Обе функции имеют при $x\to 0$ конечные пределы, ибо $\underline{\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ и $\underline{\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$. Но функция $f(x)$ не определена при $x=0$, следовательно, она имеет при этом значении устранимый разрыв 1-го рода. Этот разрыв легко устранить, если доопределить функцию в точке $x=0$ до непрерывности, положив $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=1$ (рис. 6.7).

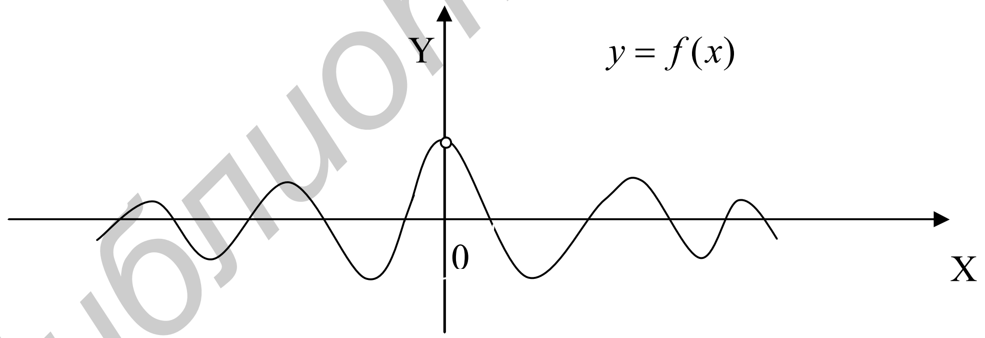


Рис. 6.7

Функция $g(x)$ определена при $x=0$, но «неправильно», ибо $\lim_{x\to 0} g(x)=1$, а $g(0)=-1$, т.е. $x=0$ также является точкой разрыва 1-го рода. Разрыв будет устранен, если изменить значение $g(x)$ в точке $x=0$, положив $g(0)=1$ (рис.6.8).

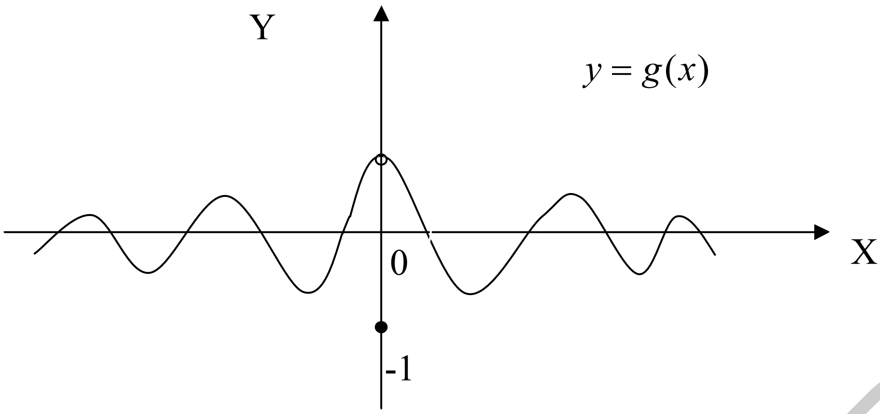


Рис. 6.8

б) Если $A \neq B$, то x_0 называется точкой неустранимого разрыва 1-го рода. При этом величину $|B-A|$ называют скачком функции в точке x_0 и обозначают $\Delta f(x_0)$ (рис. 6.9).

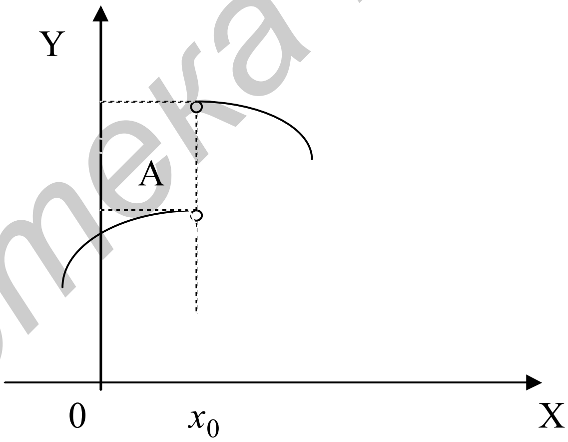


Рис. 6.9

Пример 2. Функция $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geq 1, \\ x^2, & x<1, \end{cases}$ при $x=1$ имеет неустранимый разрыв 1-го рода, так как $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+1)=2$, $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}x^2=1$. Величина скачка $f(x)$ в точке $x_0=1$ равна 1.

2. Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ в точке x_0 бесконечен или вовсе не существует, эта точка называется точкой разрыва второго рода. Заметим, что все разрывы второго рода неустранимы.

Пример 3. Функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ при $x=1$ имеет разрыв 2-го рода, так как $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ (рис. 6.10).

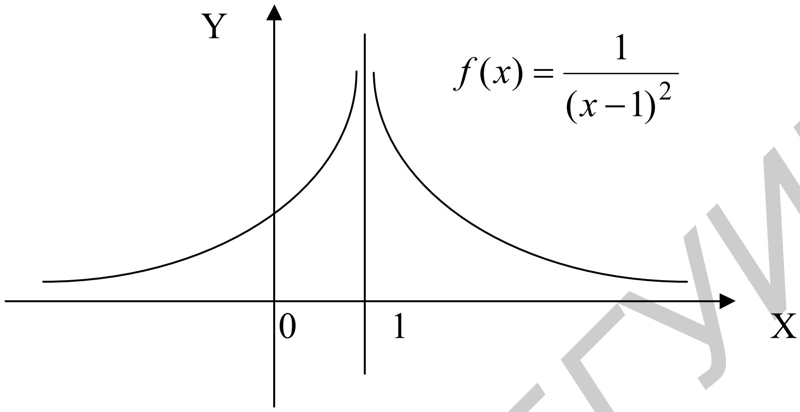


Рис. 6.10

Пример 4. Функция $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ при $x=0$ имеет разрыв 2-го рода, так как ни один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to+0}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-0}\sin\dfrac{1}{x}$ в этой точке не существует (рис. 6.11).

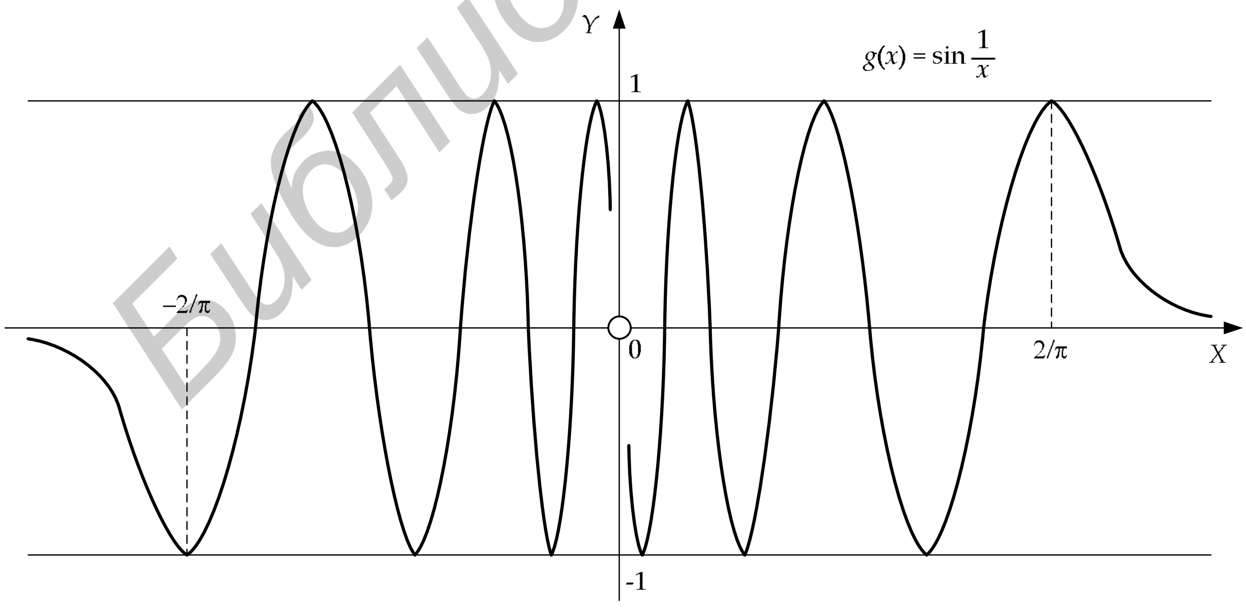


Рис. 6.11

6.10. Определить характер разрыва функции $f(x)$ при $x=2$:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$; б) $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{|x-2|}$;

в) $f(x)=x\,arctg\dfrac{1}{x-2}$; г) $f(x)=e^{\frac{1}{2-x}}$.

Δ а) Преобразуем данную функцию:

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}$$

Здесь $x-2\neq 0$, так как $x=2\notin D(f)$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$. Следовательно, $x=2$ является для $f(x)$ точкой устранимого разрыва. (Разрыв ликвидируется, если доопределить $f(x)$ в точке $x=2$, положив $f(2)=\dfrac{3}{4}$.)

б) Функция $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{|x-2|}$ не определена в точке $x_0=2$, следовательно, разрывна в ней. Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{\sin(x-2)}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+0}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=1;$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{\sin(x-2)}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-0}\frac{\sin(x-2)}{2-x}=-1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=2$ существуют, но не равны. Следовательно, $f(x)$ имеет в этой точке неустранимый разрыв 1-го рода. Величина скачка функции в этой точке равна $|1-(-1)|=2$.

в) Точка $x_0=2$ является точкой разрыва функции $f(x)=x\,arctg\dfrac{1}{x-2}$, так как $x_0\notin D(f)$. Выясним, существуют ли в этой точке односторонние пределы:

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} x\,arctg\frac{1}{x-2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi;$$

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} x\,arctg\frac{1}{x-2}=2\cdot(-\frac{\pi}{2})=-\pi.$$

Так как $f(2+0)$ и $f(2-0)$ существуют, но не равны, то $f(x)$ делает при $x=2$ конечный скачок величиной 2π.

г) Здесь также $x_0=2\notin D(f)$. Найдем односторонние пределы:

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}}=e^{-\infty}=0,\;\; f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

Один из односторонних пределов функции в точке $x_0=2$ бесконечен. Следовательно, функция имеет в этой точке разрыв 2-го рода (рис. 6.12). ▲

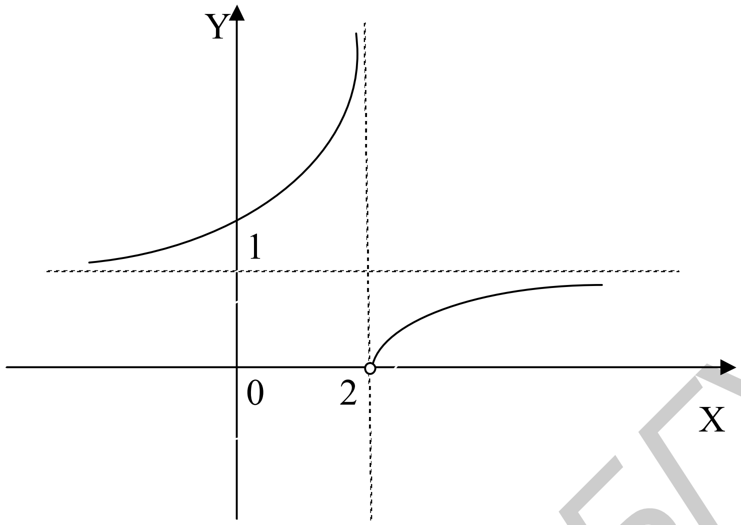


Рис. 6.12

6.11. Найти точки разрыва функции $f(x)=\begin{cases}3x^3, & x>1,\\ 2+x, & -1<x<1,\\ \dfrac{1}{x+1}, & x<-1\end{cases}$ (рис.6.13).

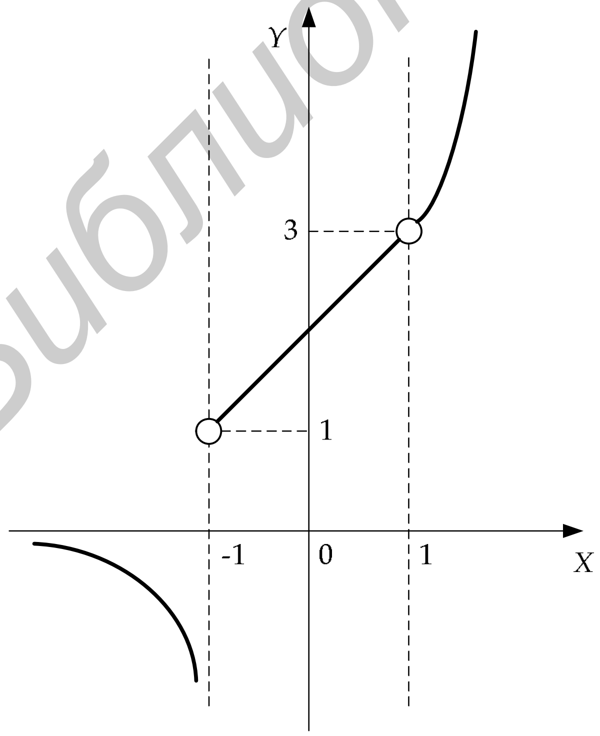


Рис. 6.13

Δ Очевидно, что $x=1$ и $x=-1$ являются точками разрыва функции, так как она в них не определена. В остальных точках функция непрерывна, так как на каждом из интервалов $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ она определена и является элементарной.

Вычислим односторонние пределы $f(x)$ в точках разрыва:

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} 3x^3=3, \qquad f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}(2+x)=3,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}(2+x)=1, \qquad f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x+1}=-\infty.$$

Поскольку $f(1+0)=f(1-0)$, то $x=1$ является точкой устранимого разрыва 1-го рода. В точке $x=-1$ функция имеет разрыв 2-го рода, так как $f(-1-0)=-\infty$. ▲

6.12. Исследовать характер разрыва функции $f(x)=2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ в точке $x=1$. Можно ли определить $f(1)$ так, чтобы функция стала непрерывной при $x=1$?

Δ Замечаем, что функция разрывна при $x=1$, так как $x=1\notin D(f)$. Выясним, существуют ли в этой точке односторонние пределы функции.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1+0}=2^{\frac{1}{1-x}}=2^{-\infty}=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}}=2^{+\infty}=+\infty$, то $f(1+0)=2^0=1$, $f(1-0)=2^{-\infty}=0$. Видим, что $f(1+0)\neq f(1-0)$, следовательно, $f(x)$ имеет при $x=1$ скачок величиной 1. В таком случае доопределить функцию в точке $x=1$ до непрерывности невозможно. ▲

6.13. Доопределить функцию $f(x)$ в точке $x=0$ до непрерывности, если это возможно.

$$f(x)=\frac{2\sin 3x\cdot arctg^2\sqrt{x}\cdot(\sqrt[5]{1+tg\,4x}-1)}{\sin 4x^2\cdot(2^{3x}-1)}.$$

Δ Выясняем, существует ли предел $f(x)$ при $x\to 0$.

Применяя таблицу э.б.м. (см. п. 4.6), получаем:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left|\begin{array}{l}\sin\alpha\sim\alpha,\quad arctg\,\alpha\sim\alpha,\quad tg\,\alpha\sim\alpha\\ \sqrt[5]{1+\alpha}-1\sim\dfrac{\alpha}{5},\quad 2^{\alpha}-1\sim\alpha\ln 2\\ при\quad \alpha\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x(\sqrt{x})^2\cdot\frac{1}{5}\cdot 4x}{4x^2\cdot 3x\ln 2}=\frac{3}{5\ln 2}.$$

Следовательно, $x=0$ является точкой устранимого разрыва, который можно ликвидировать, положив $f(0)=\dfrac{3}{5\ln 2}$. ▲

6.14. Определить характер разрыва в точке $x=0$ функции Дирихле:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \textit{если } x-\textit{рационально},\\ 0, & \textit{если } x-\textit{иррационально}.\end{cases}$$

Δ Функция $D(x)$ определена при всех x. Предположим, что существует ее предел при $x \to 0$, равный некоторому числу A. Тогда, согласно признаку Гейне, для любой последовательности $x_n \to 0,\ \ (x_n \neq 0)$, предел $D(x_n)$ также существует и равен A.

Рассмотрим две бесконечно малые последовательности: $\{x'_n\}=\{\frac{1}{n}\}$ и $\{x''_n\}=\{\frac{\pi}{n}\}$. Все члены $\{x'_n\}$ рациональны, а тогда

$$D(x'_n)=1, \quad \forall n \in N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} D(x'_n)=1.$$

С другой стороны, все члены последовательности $\{x''_n\}$ иррациональны, значит, $D(x''_n)=0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} D(x''_n)=0$. Мы получили противоречие, ибо $1\neq 0$, значит, $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$ не существует и в точке $x=0$ функция имеет разрыв 2-го рода. ▲

6.15. Доказать на языке приращений (т.е. с помощью Δx и Δy) непрерывность функции y в точке x_0:

а) $y=2x^3-1, \quad x_0=1;$ б) $y=\cos 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{4}$.

6.16. Исследовать на непрерывность в точке $x_0=0$ функции:

а) $y=\dfrac{x}{\sin 3x}$; б) $y=ctg 2x$;

в) $y=\dfrac{1}{2^{1/x}-1}$; г) $y=arctg\dfrac{\pi}{x}$.

6.17. Доопределить функцию в точке x_0 до непрерывности, если это возможно. Указать значение $y(x_0)$, устраняющее разрыв.

а) $y=\dfrac{tg 3x}{\arcsin 5x}, \quad x_0=0$; б) $y=\dfrac{8=x^3}{4-x^2}, \quad x_0=2$;

в) $y=\dfrac{\ln(\cos x)}{tg 2x}, \quad x_0=2\pi$; г) $y=\dfrac{2^{\sin x}-1}{1-\cos x}, \quad x_0=0$.

6.18. Найти точки разрыва функции и определить их тип:

а) $y=\begin{cases}2^{1/x}, & x>0,\\ (x+1)^2, & x-1<x<0,\\ \cos\pi x, & x\le -1;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ -x^3, & -1<x\le 0,\\ e^{x+1}, & x\le -1.\end{cases}$

6.19. Выяснить, при каких значениях параметров a и b функция y непрерывна для всех действительных x:

а) $y=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x>0,\\ \cos^2 x+a, & x<0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$　　б) $y=\begin{cases}(x-1)^3, & x\le 0,\\ ax+b, & 0<x<1,\\ \sqrt{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

6.20. Найти значения a и b, при которых функция

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}+a, & x>1,\\ 2, & x=1,\\ e^x-b, & x<1,\end{cases}$$

в точке $x=1$:

а) непрерывна справа; б) непрерывна слева;

в) просто непрерывна (т.е. непрерывна с обеих сторон).

6.21. Найти точки разрыва функции, установить их род; доопределить функцию до непрерывности в точках устранимого разрыва; найти скачки в точках разрыва 1-го рода.

1) $y=\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2}$;　　2) $y=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

3) $y=\ln(\ln(1-x^2))$;　　4) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

5) $y=sign(\cos x)$.

Исследовать функцию на непрерывность в № **6.22–6.23** и построить график в № **6.22–6.23**:

6.22***.** а) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$;　　б) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+x^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

6.23***.** а) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$;　　б) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}(x\cdot arctg(n\cdot ctgx))$.

7. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ (ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ)

Вариант 1

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{7-2n}=-\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)!-3n!\cdot(n^2+1)}{(n-1)!+n\cdot n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n-5}-\sqrt{4n^2-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3\cdot 5^{n-1}}{5^n-3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4}{3n^2-5}\right)^{n+1}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to1}(2x-3)=-1$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\, x-\sin x}{\arcsin^3 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin\pi x}{\log_3 x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm0}\dfrac{1}{5+3^{1/x}}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt[5]{x^3}+2\sqrt[3]{x}+x}{7x+1}$ при $x\to0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=arctg\,\dfrac{2n^2+1}{4n^5-2n+5}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=2x^3-3x$ в точке $x_0=1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{\sin\pi x}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 2

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3}{3n^2+1}=\dfrac{2}{3}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(n+3)!-2(n+1)!}{n(n+2)!+3(n+1)!}$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-4})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 4^n-2\cdot 3^n\cdot\sin n}{3\cdot 2^n+4^{n+1}}$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n+1}\right)^{4-n^2}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(4-3x)=-2$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2x^2-x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_2 x}{ctg\dfrac{\pi}{2}x}$;   г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{2\pi-x}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} e^{\frac{1}{x-1}}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{2}{x^2-x}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м. $\alpha(x)=3\sqrt{\sin^5 x}-4x\,tg\,x$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м. $\beta(n)=\arcsin\dfrac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=4x^2-5x+3$ в точке $x_0=2$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=x\cdot ctg\,2x$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{\cos\pi x}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 3

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^3}{2-3n^3} = \dfrac{1}{3}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!-2(n-1)!}{3(n-2)!+n^2(n-1)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1}\times(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1}\cdot\cos n + 5\cdot 7^n}{7^{n-1}-4\cdot 3^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-5}\right)^{n^4}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(4x+1)=5$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{3+2x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x^2)}{1+x\sin x-\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi^2-x^2)ctg\, 5x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2e^{x-2}-1)^{\frac{3x-1}{2-x}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{x}{|x^2-4x|}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=5^{\frac{1}{2-x}}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt[3]{tg\, 8x^6})-4x^3$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=(2n+1)(e^{\frac{1}{n}}-1)^2$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=5x^3+6x^2-4$ в точке $x_0=0$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\ln(\cos 2x)}{3x^2}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 4

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^n-1}{2^n+5}=3$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+2)!-(n-1)\cdot n!}{5(n+1)!+n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{1-n^2-n^3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}-5^n}{2\cdot 4^n+5^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3}{4n-7}\right)^{1-n^3}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to-1}(1-2x)=3$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{1-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^{2x}-e^{-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\pi/4}\dfrac{\sin 4x}{1+tg\,x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{\ln(2-x)}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to1\pm0}\dfrac{1}{3-3^x}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2-3}{x+1}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\sin(\sqrt{x^2+9}-3)+2\sqrt{x^7}$ при $x\to0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\ln\dfrac{n^3}{n^3+1}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=3x^2+7x-1$ в точке $x_0=-1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{arctg^2 3x}{\sin 5x^2}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{e^{1/x}+1}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 5

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=-2.$

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n-3)!+(n-1)!}{(n+2)(n-2)!+2(n-1)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n^2-2}-\sqrt{n^3+1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-2}+5^n\cdot arctg\, n}{6^{n+1}-2\cdot 5^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{4n+1}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0.$

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{1-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)tg\dfrac{\pi x}{4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{3x})^{\frac{1}{\arcsin x/2}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2-x}{|x-2|}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=4^{\frac{1}{x+1}}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=2x^2-\cos 6x+1$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\dfrac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{n+3}}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=3x-4x^3+1$ в точке $x_0=1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{2^{x^3}-1}{5x^3}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 6

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n}{6-2n}=-\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-2n\cdot n!}{(n+1)(n-1)!+3n^3\cdot n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-1}-\sqrt[3]{n^3+n^2+2})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\cdot 5^{n+2}-(-1)^n\cdot 3^{n-1}}{2^n+3^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n^2+4}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(-5+2x)=-1$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{5x^2-6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\ln(1+2x^3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{tg\,3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{\frac{1}{1-e^{x^2-1}}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{x}{|tg\,x|}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=-\dfrac{1}{x^2(x+5)}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=6arctg\dfrac{x^2}{3}-3\sin 5x$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\ln\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=7x-5x^2-2$ в точке $x_0=-2$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+tg^2 2x}-1}{x^2}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 7

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4}{1-n^2}=-3.$

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-(n+3)!}{5(n+2)!+(n-4)\cdot(n+1)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\times(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 4^{n+1}-3\cdot 2^n\cdot arcctg\, n}{3^{n-2}-4^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2+n-5}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to-1}(1-x^2)=0.$

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x^2+3}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\arcsin x/2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln tg\, x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(3-2\cos x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm0}\dfrac{1}{arctg\, x}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{1}{x(x+2)^2}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=3\sin^2 2x-6x^3$ при $x\to0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\dfrac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}+1)}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=5x^2+4x-1$ в точке $x_0=0$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{arctgx^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 8

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 3^n+7}{1-3^n}=-2.$

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n-2)!+3n!}{(n-1)!+n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2+n-2})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-3}-7^n}{5\cdot 3^{n+1}+\cos n^2\cdot 2^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+2}{n^3-1}\right)^{-2n^2}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 4}(3x-10)=2.$

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^3)}{2\sin x-\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}(x^2-\pi^2)ctg\,3x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3e^{x-2}-2\right)^{\frac{1}{2x-x^2}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{\log_{1/2}x}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\sqrt{x^3+1}-1+3\sqrt[3]{x^8}$ при $x\to 0$; б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\dfrac{e^{\frac{1}{2n^3}}-1}{\sqrt{9n^2+5}}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=6x^3-2x^2+3$ в точке $x_0=2$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{arc\cos x}{x}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 9

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-4}{1-3n^3}=-2.$

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)!-3(n+1)!}{(n-1)\cdot n!+(n+2)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9n^2-3}\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-7\cdot 4^{n+2}}{5^{n-1}+(-1)^n\cdot 3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{5n-1}\right)^{3-5n}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 5}(17-4x)=-3.$

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3-x+2}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -\pi} ctg\,3x\cdot\sin 5x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(5-2x)}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0} arctg\,\dfrac{1}{x}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{3}{(x+1)^2\cdot x}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=e^{-2x}+5x^2-1$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=n^3 tg\,\dfrac{\pi}{n^4+n-3}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=8x-4x^2+1$ в точке $x_0=3$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x^2}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x-1}{\left|x^2-1\right|}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 10

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\sqrt[3]{n}}{8-\sqrt[3]{n}}=-1$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot(n-1)!+(n-2)!}{(n-3)!-n(n-2)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^6-n^5-1}-n^2)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{n-1}-5^{n+1}}{\cos n\cdot 4^n+2\cdot 6^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-4}{n^2+5}\right)^{1-n+n^3}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to-3}(x^2-9)=0$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x-2-3x^2}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\,6x}{2^{3x}-3^{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}(3-x)\cdot tg\,\dfrac{\pi x}{6}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\cos 2x\right)^{\frac{8}{\sin^2 4x}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to4\pm0}3^{\frac{1}{4-x}}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt{x^5}-2\sqrt[3]{x^2}+3x^2}{x+8}$ при $x\to0$; б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=2-3x^2-4x^3$ в точке $x_0=-1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=x\cdot arctg\,\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2}{\cos x-1}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 11

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+2}{3n-1}=\dfrac{5}{3}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)\cdot(n-1)!+n!}{(n+1)!-4(n-1)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n-6}-2n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-3}+\sin\sqrt{n}\cdot 3^n}{2^{n+1}-3^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^{3-n}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x+3)=3$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+2x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tg\, x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{3}{7+2x}\right)^{\frac{1}{\ln(5+2x)}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1}{2^x-1}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{4}{(3-x)x^2}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=x\,arctg^2\sqrt{3x}-2x^3$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\dfrac{1-\cos\frac{3}{n}}{2n^2+4n-5}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=3-5x-6x^2$ в точке $x_0=1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{x(x+2)}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 12

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-n^2}{4n^2-1}=-\dfrac{1}{4}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+n(n+2)!}{2n^2(n+1)!-(n+2)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{8n^3-n+1}-2n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{(-1)^n\cdot 3^{n-1}-2\cdot 4^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-4}\right)^{n^3+2n-1}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to -2}(4-2x)=8$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 2x}{1-\cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -\pi/4}\dfrac{\cos 6x}{tg\,x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^3}\right)^{\frac{1+x}{\ln(1-2tg^2 x)}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} arcctg\,\dfrac{1}{2-x}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=5^{\frac{1}{3-x}}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\dfrac{5x^3-2x^2+\sqrt[3]{x^{10}}}{x-4}$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\ln\dfrac{2n^2+3n+1}{2n^2+n-2}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=5-2x+4x^3$ в точке $x_0=0$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 13

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+1}{10-n^3}=-4.$

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)\cdot n!+3(n-1)!}{n!+n(n-2)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+5n-4})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-4\cdot 3^{n-2}\cdot\sin\sqrt{n}}{7^{n-1}+5\cdot 3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-4}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x-4)=-4.$

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{x^3+4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2tg\,3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\pi x}{\log_3 x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1}{2^{1/x}+1}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=x^2 arctg\,2\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x^3}$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\ln(3n+2)-\ln(3n-5)$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=4+3x-2x^2$ в точке $x_0=1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}+x^2$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2-25}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 14

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+6}{3-5^n}=-1$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\cdot(n+1)!-3(n+2)!}{n!+(n+1)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{1-n^2-n^3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-6\cdot 4^n}{3^{n-1}+2\cdot 5^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5}{3n^2+2}\right)^{1-n^3}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 4}(16-x^2)=0$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x^3}{3}}{\ln\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{tg(x^2-1)}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{ctg\frac{\pi x}{3}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x^2-9}{|x-3|}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=6^{\frac{1}{x-2}}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=x\sin^2\sqrt{5x}-3x+x^3$ при $x\to 0$, б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=(5n^2+3)(e^{\frac{1}{n-1}}-1)^4$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=x^3-3x^2+2$ в точке $x_0=-1$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{\ln(1-2x)}{x^2+4x}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Вариант 15

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+2}{6\sqrt{n}-5}=\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)!+6n(n-2)!}{(n-1)!+(n+1)(n-3)!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^3-1}-\sqrt{n^4+2})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-2}+6^{n+1}}{12\cdot 6^n-arctg\, n\cdot 4^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4}{n^2-7}\right)^{5-n-n^4}$.

3. Используя определение предела функции по Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-5)=-2$.

4. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-2^{3x}}{\arcsin\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\log_2 x}{tg\,\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

5. Вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{|1-x|}{x^2+2x-3}$.

6. Найти асимптоты и построить график функции $y=2^{\frac{1}{4-x}}$.

7. Найти главную часть вида а) cx^k б.м.ф. $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{2x^2+3}$ при $x\to 0$,

б) $\dfrac{c}{n^k}$ б.м.п. $\beta(n)=\dfrac{(n+1)\,arctg\dfrac{1}{n}}{(\sqrt{n+5}+2)(2n^2+4n-3)}$ при $n\to\infty$.

8. Доказать непрерывность функции $f(x)=3x^2-5x+7$ в точке $x_0=2$ на языке приращений.

9. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{e^{-tg5x}-1}{\sin 3x}$ в точке $x_0=0$ до непрерывности, если это возможно.

10. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin 3x^2}{x^3-3x^2}$ и определить их тип. В точках разрыва 1-го рода найти скачки функции.

Ответы

Глава 1

1.1. $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. **1.2.** $A=\left\{1;\dfrac{3+\sqrt{21}}{2};\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

1.3. $A=\{-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$. **1.4.** $A=\left\{0;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3};\pi\right\}$. **1.5.** $A=\{1;\ 2;\ 3\}$.

1.6. 1) $A\bigcup B=\{1;\ 2\}$, $A\bigcap B=\{2\}$, $A\setminus B=\emptyset$, $B\setminus A=\{1\}$;
2) $A\bigcup B=\{-3;\ 4\}$, $A\bigcap B=\{4\}$, $A\setminus B=\emptyset$, $B\setminus A=\{-3\}$.

1.7. 1) $A\bigcup B=(0;\ 4]$, $A\bigcap B=[1;\ 3)$, $A\setminus B=(0;\ 1)$, $B\setminus A=[3;\ 4]$.
2) $A\bigcup B=[-5;\ 1]$, $A\bigcap B=(-2;-1]$, $A\setminus B=[-5;-2]$, $B\setminus A=(-1;\ 1]$.

1.8. $\{-1;\ 1\}$. **1.9** $(-1;\ 1)$. **1.10.** $[-1;\ -0{,}5]\bigcup[0{,}5;\ 1]$. **1.11.** $\{-1\}\bigcup(0;\ 1]$.

1.12. $[-1;\ 0)\bigcup(0;\ 0{,}5)\bigcup\{1\}$. **1.22.** $\max X=\sup X=1$, $\min X=\inf X=-1$.

1.23. $\max X$, $\min X$, $\sup X$ не существуют, $\inf X=0$.

1.24. $\max X$ не существует, $\sup X=5$, $\inf X=\min X=2$.

1.25. $\max X=\sup X=1$, $\inf X=0$, $\min X$ не существует.

1.26. $\max X=\sup X=-1$, $\min X$ и $\inf X$ не существуют.

1.27. $\max X=\sup X=1/2$, $\inf X=0$, $\min X$ не существует.

1.28. $\sup X=\sqrt{2}$, $\inf X=-\sqrt{2}$.

Глава 2

2.9. $-4+i$. **2.10.** $7-3i$. **2.11.** $11-i$. **2.12.** $23-14i$. **2.13.** $1+i$.

2.14. $-\dfrac{1}{25}-\dfrac{7}{25}i$. **2.15.** $\dfrac{5}{17}-\dfrac{3}{17}i$. **2.16.** 0. **2.17.** $-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$. **2.18.** $x=2,\ y=1$. **2.19.** $x=\dfrac{20}{17},\ y=-\dfrac{36}{17}$. **2.20.** $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{1}{4}$.

2.21. $x=-\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ y=-\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. **2.22.** $x=-\dfrac{1}{3},\ y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

2.23. $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_{3,4}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **2.24.** $z=\dfrac{3}{3}+i$. **2.25.** $z=1+i$. **2.26.** $z_1=1$, $z_2=i$. **2.27.** $z_1=1+ti$, $z_2=t$, $t\in R$.

2.28. $z_1=2+i$, $z_2=2-i$.

2.29. $z_1=5-5i$, $z_2=-5+5i$, $z_3=\sqrt{26}-\sqrt{26}\,i$, $z_4=-\sqrt{26}+\sqrt{26}\,i$.

2.30. $z=\dfrac{7}{6}+\dfrac{5}{6}i$. **2.41.** 1) $-\sqrt{5}i$; 2) -4; 3) $1+\sqrt{3}\,i$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

2.42. 1) $4(\cos 0 + i\sin 0) = 4e^{0\cdot i}$; 2) $3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{\pi i}$;

3) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$; 4) $5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

2.43. 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; 2) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)i\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

3) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}$;

4) $8\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 8e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

2.44. 1) $13\left(\cos\left(arctg\frac{12}{5}\right) + i\sin\left(arctg\frac{12}{5}\right)\right)$;

2) $5\left(\cos\left(\pi - arctg\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\pi - arctg\frac{4}{3}\right)\right)$;

3) $\sqrt{5}(\cos(-arctg 2) + i\sin(-arctg 2))$;

4) $\sqrt{17}\left(\cos\left(arctg\frac{1}{4} - \pi\right) + i\sin\left(arctg\frac{1}{4} - \pi\right)\right)$.

2.45. 1) $\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$; 2) $\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)$;

3) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$.

2.46*. 1) $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$;

2) $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

2.47*. $\frac{5}{3}\left(\cos(-130^\circ) + i\sin(-130^\circ)\right)$.

2.48*. $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\left(-\frac{11}{20}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{11}{20}\pi\right)\right)$. **2.63.** 1) $-4 + 4i$;

2) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **2.64.** $\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ$. **2.65.** –2. **2.66.** $-\frac{1}{64}$.

2.67. $2\cdot(-1)^n$. **2.68.** $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8 + i\sin 8)$. **2.69*.** $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}i$.

2.70. $n = 4k,\quad k \in Z$. **2.73.** $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$,

$\sin 4\varphi = 4\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$. **2.74.** $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$

при $x \neq 0$; n при $x = 0$. **2.76.** $\omega_{1,2} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **2.77.** $\omega_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$,

$\omega_3 = -2$. **2.78.** $\omega_{1,2} = \pm\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\omega_{3,4} = \pm\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

2.80. $\omega_{1,2} = \pm\left(\sqrt{3} - i\right)$. **2.87.** $k = 1$. **2.88.** $k = 1$. **2.90.** 1; 3; 5; 7.

2.91*. $z^3 - 9z^2 + 24z - 16$. **2.92.** $z_1 = 1$. **2.93.** $z_1 = -1$. **2.94.** $z_1 = -\dfrac{1}{2}$.

2.95. 1; –2; 3. **2.96.** 1; 1; –2. **2.97.** –1; –2; –2. **2.98*.** 9. Указание: сделать замену $z = 2 - u$. **2.99.** $-2z$. **2.100*.** $z^2 + z - 1$.

Глава 3

3.3. $\{1/2; 1; 5/4; 7/5; 3/2\}$. **3.4.** $\{-1;\ 1/2;\ -1/3;\ 1/4;\ -1/5\}$.

3.5. $\{0;\ 4;\ 0;\ 8;\ 0\}$. **3.6.** $\{5/6\pi;\ 13/6\pi;\ 17/6\pi;\ 25/6\pi;\ 29/6\pi\}$. **3.7.** $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

3.8. $x_n = (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n+1}$. **3.9.** $x_n = 2\cdot\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$. **3.10.** $x_n = (-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{2n-1}$.

3.11*. $x_n = \dfrac{1}{3}(1 - 10^{-n})$. **3.12*.** $x_n = \dfrac{n}{2^n}$. **3.13.** $x_n = 3n + 2$.

3.14. $x_n = 3\big/2^{n-1}$. **3.15.** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.

3.16*. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

3.17*. $x_n = (2a - 2b + (2b - a)n)2^{1-n}$. **3.18.** а) 1; б) 2; 4; в) 2; 3; г) 2; 3; 4; д) 1; 2; 3. **3.19*.** Наименьший член $x_2 = -22$. **3.20*.** Наибольший член $x_3 = 4$. **3.21*.** Наибольший член $x_1 = \dfrac{1}{3}$. **3.60.** 5. **3.61.** $-1/2$. **3.62.** 0. **3.63.** $-\infty$. **3.64.** $-\infty$. **3.65.** 0. **3.66.** 3. **3.67.** 3. **3.68.** $+\infty$. **3.69.** 0. **3.70.** $-\sqrt{2}$. **3.71.** 0. **3.72.** $-3/2$. **3.73.** $7/2$. **3.74.** $3/2$. **3.75.** –1. **3.76.** $1/3$. **3.77.** 0. **3.78.** $2/3$. **3.79.** $-\infty$. **3.80.** –1. **3.81.** –24.

3.82. $1/4$. **3.83.** $-3/2$. **3.84.** $4/3$. **3.85.** $3/2$. **3.86.** 1) $+\infty$; 2) 1; 3) 0. **3.87.** 1) e^2; 2) $1/e$. **3.88.** e^3. **3.89.** e^{-4}. **3.90.** $+\infty$. **3.91.** 0. **3.92*.** $4/3$. **3.93*.** $-1/4$. **3.94*.** 2. **3.95*.** 1. **3.96.** 0. **3.97.** 0. **3.98.** $1/2$. **3.99.** $1/2$.

Глава 4

4.16. 1) $1/4$; 2) ∞; 3) $1/2$; 4) 0. **4.17.** 1) 1; 2) ∞; 3) $1/2$; 4) $1/3$. **4.18.** –16. **4.19.** $1/3$. **4.20.** ∞. **4.21.** $\mp\infty$. **4.22*.** m/n. **4.23.** $\dfrac{a-1}{3a^2}$. **4.24.** $8/9$. **4.25.** ∞. **4.26*.** $49/24$. **4.27.** $1/2$. **4.28.** $-1/4$. **4.29.** –3. **4.30.** $3/2$. **4.31.** $1/12$. **4.32.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **4.33.** –6. **4.34*.** m/n. **4.35*.** $\dfrac{112}{27}$. **4.36*.** $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. **4.37*.** $-\dfrac{1}{2}$. **4.38.** $-\dfrac{7}{4}$. **4.39.** 0. **4.40*.** $\dfrac{1}{2}$. **4.41*.** $-\dfrac{1}{4}$. **4.67.** $-\dfrac{1}{4}$. **4.68.** $-\dfrac{1}{3}$. **4.69.** 0. **4.70.** 5. **4.71.** –2. **4.72.** $-\dfrac{2}{3\pi}$. **4.73.** 1. **4.74.** 1. **4.75*.** $3/4$. **4.76*.** 0. **4.77*.** $-\sin a$. **4.78*.** 14. **4.79*.** e^{-3}. **4.80.** e^{20}. **4.81.** $e^{-1/18}$. **4.82.** 1. **4.83*.** e. **4.84*.** $e^{-1/2}$. **4.85.** 6. **4.86.** $-6e^{-3}$. **4.87.** 2. **4.88.** $-\dfrac{1}{5}$ **4.89.** 4. **4.90.** -4. **4.91*.** $\dfrac{1}{5}$ **4.92*.** $27\ln 3-27$. **4.93.** $-1/10$. **4.94.** –1. **4.95.** 0. **4.96.** ∞. **4.97*.** $\dfrac{\pi^2}{2\ln a}$.

Глава 5

5.13. Одного порядка. **5.14.** $\alpha=o(\beta)$. **5.15.** $\alpha=o(\beta)$. **5.16.** Одного порядка. **5.17.** $\alpha=o(\beta)$. **5.18.** $\alpha=o(\beta)$. **5.19.** $\beta=o(\alpha)$. **5.20.** $\alpha=o(\beta)$. **5.21.** $12x^2$. **5.22.** $-2x^2$. **5.23.** $\dfrac{1}{2}(x-1)$. **5.24.** $\dfrac{1}{8x^4}$. **5.25.** $\dfrac{13}{2}x^2$. **5.26.** $\dfrac{9}{4}x^4$. **5.27.** $\sqrt[8]{x}$. **5.28.** $-x$. **5.29.** $-\dfrac{27(x-2\pi)^3}{2}$. **5.30.** 4. **5.31.** 2. **5.32.** 4. **5.33.** 3. **5.34.** 2. **5.35.** 3. **5.36.** 2. **5.37.** $\dfrac{1}{2}$. **5.38.** 3. **5.39.** 2. **5.40.** $\dfrac{7}{3}$. **5.41.** $\dfrac{5}{2}$. **5.42.** $\dfrac{1}{3}$. **5.43.** $\dfrac{3}{2}$. **5.44.** 1. **5.45.** 2. **5.46.** Да. **5.47.** Да. **5.48.** Нет. **5.49.** Нет. **5.50.** Нет. **5.51.** Нет. **5.52.** Нет. **5.53.** Да. **5.54.** Нет. **5.56.** а), в), д). **5.57.** ***B*** более высокого порядка. **5.58.** Одного порядка. **5.59.** ***A*** более высокого порядка. **5.60.** $A\sim B$. **5.61.** Одного порядка. **5.62.** 2. **5.63.** 2. **5.64.** 2. **5.65.** $\frac{1}{2}$. **5.66.** 6. а) $3x$; б) $-x^3$. **5.68.** а) x^2; б) $16x^6$. **5.69.** а) $\sqrt{x}$; б) x^4.

Глава 6

6.16. а) Устранимый разрыв; б) разрыв 2-го рода; в) $y(+0)=0$, $y(-0)=-1$. Разрыв 1-го рода; г) $y(+0)=\frac{\pi}{2}$, $y(-0)=-\frac{\pi}{2}$. Разрыв 1-го рода. **6.17.** а) $\frac{3}{5}$; б) 3; в) 0; г) невозможно. **6.18.** а) $x=0$ (2-го рода), $x=-1$ (1-го рода, неустранимый); б) $x=0$ (2-го рода). **6.19.** а) $b=-1$, $a=0$; б) $b=-1$, $a=2$. **6.20.** а) $a=2$; б) $b=e-2$; в) $a=2$, $b=e-2$. **6.21.** 1) $x=0$ (2-го рода), $x=1$ (устранимый). $f(1)=-\frac{\pi}{2}$. 2) $x=0$ (устранимый), $f(0)=0$. 3) $x=0$ (2-го рода) . 4) $x=0$ (устранимый), $f(0)=2$; $x=\pm 1$ (2-го рода); $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (1-го рода, $|\Delta k|=2$). **6.22*.** а) $y=x^2$ при $x>0$, $y=0$ при $x=0$, $y=x$ при $x<0$. Функция непрерывна $\forall x$; б) $y=1$ при $|x|\le 1$, $y=x^2$ при $|x|>1$. Функция непрерывна $\forall x$. **6.23*.** а) При $x=0$ разрыв 1-го рода. б) При $x=0$ устранимый разрыв $(y(\pm 0)=0)$. При $x=k\pi$ $(k=\pm 1, \pm 2, ...)$ разрывы 1-го рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. – М.: Наука, 1966.

2. Кудрявцев Л.М., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 1984.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1969.

4. Пушкарева Т.М., Третьякова Н.Н. Введение в анализ: Программированный задачник. – М.: МРТИ, 1987.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1/ В.А. Болгов и др. – М:. Наука, Физматлит, 1986.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.