действует на каждую вертикальную сторону:

$$F = \int_0^{H(x)} p(x,z)\,\Delta y dz = \rho g * \frac{H^2(x)}{2} * \Delta y$$

и результирующую ΔF:

$$\Delta F = F(x) - F(x+\Delta x) = -\rho g H(x)\frac{dH}{dx}\Delta x\Delta y,$$

которая уравновешивается силой трения льда о землю, которая в этом случае рассчитывается по формуле: $F_{\text{тр}} = \beta * \Delta x\Delta y$, где коэффициент напряжения сдвига $\beta = 100\text{кПа}$. Из этого получаем

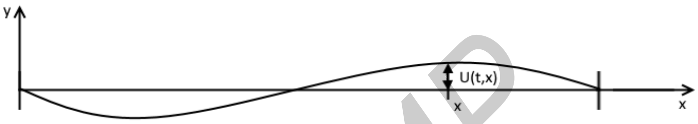
$$H(x)\,dH = -\frac{\beta}{\rho g}dx$$

откуда, с учётом $H(L) = 0$:

$$H(x) = \sqrt{\frac{2\beta L}{\rho g}} * \sqrt{1 - \frac{x}{L}} \to H_{max} = \sqrt{\frac{2\beta L}{\rho g}}.$$

Теперь мы можем найти объём льда, который находится на модели Гренландии:

$$V_{\text{лёд}} = \int_0^{5L}\int_{-L}^{L} H(x)dx\,dy = \frac{20}{3}L^2\sqrt{\frac{2\beta L}{\rho g}}.$$



Максимальное повышение уровня мирового океана будет при полной расплавке ледяного щита Гренландии. Будем считать, что процесс поднятия уровня океана происходит только на территории океана, то есть затопления не происходит.

Так как масса растаявшего льда и образовавшейся воды равна, то $V_{\text{вода}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{вода}}}V_{\text{лёд}}$

Тогда уровень, на который поднимется океан, будет равен:

$$\Delta h = \frac{V_{\text{вода}}}{S_0} = \frac{20}{3}\frac{\rho}{\rho_{\text{вода}}}\frac{L^2}{S_0}\sqrt{\frac{2\beta L}{\rho g}}$$

где площадь территории океана $S_0 = 3{,}6 * 10^{14}\text{м}^2$.

Подставив числа, находим, что уровень океана поднимется на $\Delta h = 8{,}5\text{м}$.

На территориях, где уровень поверхности меньше полученного результата проживает более 10% населения земли, а значит – они будут вынуждены искать новый дом в другом месте.

Полученная цифра близка к оценкам учёных-геофизиков, которые рассчитали, что при полном превращении льдов Гренландии в воду уровень мирового океана поднимется более чем на 7м.

Таким образом была разработана модель таяния ледника, для которой был использован метод физико-математического моделирования. Этот метод позволил довольно точно оценить искомую величину, с учётом допустимых приближений. Результат работы показывает необходимость поиска человечеством способов по предотвращению повышения температуры Земли, иначе появление и обострение других глобальных проблем, таких как чрезмерное повышение плотности населения и голод, неизбежно.

Список использованных источников:

1. Гренландский ледяной щит. – Электрон. текстовые дан.– Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гренландский_ледяной_щит, свободный.
2. Математическая модель.–Электрон. текстовые дан.–Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Математическая_модель, свободный.

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СТРУНЫ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Бублей Д.В., Атарик К.А.

Смирнова Г.Ф. – кандидат физ.-мат. наук, доцент

Математика служит языком физики. Результаты математических изысканий находят применение в описании различных физических явлений и процессов. Однако случается и так, что решение совершенно практической физической задачи служит мощнейшим толчком в развитии математики. Одной из таких задач является задача колебания струны.

Рассмотрим малые колебания струны. Основная характеристика состояния струны – её отклонение от стационарного положения – U(t,x) (Рис.1).

Рассмотрим силы, действующие на бесконечно малый участок струны (Рис.2).

Согласно второму закону Ньютона:

Рис.1 Форма струны в определённый момент.

$F = ma.$

$F_1 = F_2 = T$, где T – сила натяжения струны.

$a = U(t, x)$ – по определению ускорения.

Таким образом, второй закон Ньютона для рассматриваемого участка струны запишется в виде:

$\Delta mU\ t, x\ = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 - \gamma\Delta xU\ t, x + 1\ \ 2\,\Delta x\ \ - \Delta mg$ (1),

где γ – модуль Юнга среды, g – ускорение свободного падения.

Вычислим значения синусов, входящих в уравнение (1). Т.к. колебания малые то и углы θ_1 и θ_2 малы, тогда:

$\sin\theta \approx \tan\theta = U'(t, x)$

$\sin\theta_1 = U'(t, x)$

$\sin\theta_2 = U'(t, x + \Delta x)$

В итоге уравнение (1) преобразуется к виду:

$\Delta mU\ t, x\ = T(U'(t, x + \Delta x) - U'(t, x)) - \gamma\Delta xU\ t, x + 1\ \ 2\,\Delta x\ \ - \Delta mg.$

Разделив на Δx и обозначив линейную плотность струны как λ имеем:

$\lambda U\ t, x\ = TU''\ t, x\ - \gamma U\ t, x\ - \lambda g$ (2) (полное уравнение колебания струны),

$\lambda U\ t, x\ = TU''\ t, x\ - \lambda g$ (3) (без учёта воздействия упругой среды),

$\lambda U\ t, x\ = TU''(t, x)$ (4) (без учёта воздействия упругой среды и силы тяжести).

Получаем уравнения в частных производных, для их решения необходимо определить начальные условия.

Рассмотрим решение уравнения (4) в общем виде. Не ограничивая общности, определим начальные условия:

$U\ 0, x\ = \varphi\ x\ ,$

$U\ 0, x\ = \omega\ x\ .$

Где

$\varphi\ x$ - описывает изначальную форму струны,

$\omega\ x$ - описывает изначальную скорость струны в каждой её точке.

Перепишем уравнение (4) в виде $U\ t, x\ = a^2U''(t, x)$, где $a^2 = \frac{T}{\lambda}$, $a = \frac{м}{с}$. Решив это дифференциальное уравнение получим

$$U\ t, x\ = \frac{\varphi\ x - at\ + \varphi\ x + at}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\omega(\tau)d\tau$$

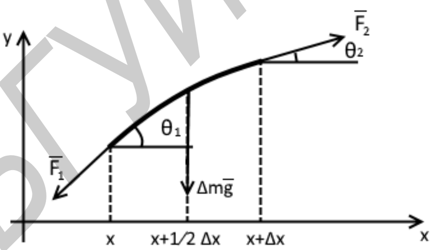


Рис.2 Силы, действующие на участок струны.

Подобные решения были получены Даламбером и Эйлером. В этом решении $\varphi\ x$ и $\omega\ x$ – произвольные функции, это и вызвало серьёзнейшие споры среди математиков XVIII века. Проблема заключалась в различном трактовании понятия произвольной функции. До решения этой задачи все рассматриваемые математиками функции составлялись путём комбинирования элементарных функций. Тогда существовали два определения функции: 1) функция – это закон, позволяющий по определённым правилам вычислять её значение в зависимости от величины её аргумента (подход Бернулли), 2) функция – переменная величина, изменяющаяся во времени (подход Ньютона). Возникшие разногласия послужили толчком к развитию дифференциального исчисления и функционального анализа.

Позже Фурье, решая эту же задачу, предположил, что форму струны в любой момент времени можно представить как сумму бесконечного ряда некоторых функций, например тригонометрических. То есть, если начальные условия представимы в виде

$$U\ 0, x\ = \varphi\ x\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi\ x\ \sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$$

где

$$U'\ 0, x\ = \omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad B_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l \omega(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx,$$

то искомое решение уравнения (4) имеет вид:

$$U\ t, x\ = \sum_{n=1}^{\infty} U_n\ t, x\ = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at + B_n\sin\frac{\pi n}{l}at)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Ещё одна проблема, поднимаемая данной задачей, — проблема дифференцируемости функций $\varphi\ x$ и $\omega\ x$. Так как $\varphi\ x$ и $\omega\ x$ произвольные функции, они могут претерпевать излом в некоторых точках, т.е. не являться дифференцируемыми в них, однако, получить решение и при подобных начальных условиях оказывается возможным. Тогда возникает вопрос: какой смысл имеет дифференциальное уравнение, если его решением является не дифференцируемая функция. Эта проблема разрешилась лишь в 1935 году, с введением С.Л. Соболевым понятия обобщённой функции, что также позволило дать строгое математическое описание таким физическим моделям как материальная точка, точечный диполь и др.

Список использованных источников:

1. Christensen, T. Eighteenth-Century Science and the Corps Sonore: the Scientific Background to Rameau's Principle of Harmony // Journal of Music Theory. — 1987.
2. Стиллвелл, Дж. Математика и её история. — Ижевск: Институт компьютерных исследований//РХД, 2004. — 530 с.