МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА НА ГИБРИДНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРИВОДЕ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Войтов А. Ю.

Дайняк И. В. – кандидат техн. наук, доцент

Реализация необходимого перемещения и ориентации исполнительного элемента, связанного с инструментом или заготовкой автоматизированного оборудования, характеризуемого подвижностью до шести степеней свободы включительно, наиболее эффективно осуществляется при использовании реконфигурируемых механизмов параллельной кинематики на гибридных многокоординатных приводах прямого действия. В сравнении с традиционными промышленными роботами и манипуляторами, имеющими разомкнутую структуру, они отличаются высокой структурной жёсткостью, модульностью конструкции и позволяют добиваться высокой динамической точности за счёт устойчивости к вибрациям.

В настоящей работе рассматривается параллельный манипулятор с шестью степенями свободы на гибридном приводе прямого действия, содержащем жёсткое треугольное основание с тремя магнитными направляющими для шести линейных подвижных координатных электромагнитных модулей. Структурно-кинематическая схема параллельного манипулятора приведена на рис. 1. Особенностью схемы является предложенная конфигурация гибридного привода со спаренными координатными модулями на каждой из трёх направляющих, линейные перемещения которых s_i(i=1,2,…,6), как задаваемые функции положения ведущих звеньев исполнительного механизма параллельной кинематики, преобразуются в шесть независимых между собой координатных функций положения подвижного исполнительного элемента, треугольной платформы *ABC*, включая три линейных $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ и три угловых φ, θ, ψ [1]. Структурная схема шестикоординатного линейного привода на треугольной направляющей представлена на рис. 2.

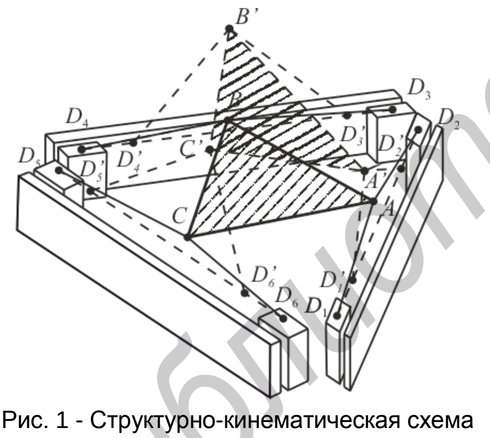

Рис. 1 - Структурно-кинематическая схема параллельного манипулятора

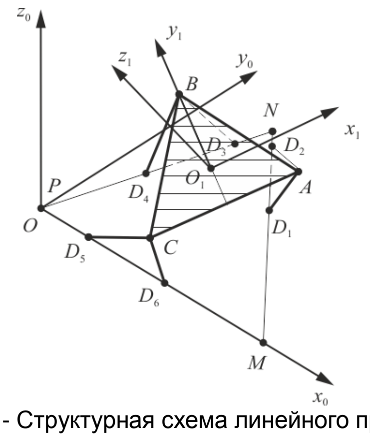

Рис. 2 - Структурная схема линейного привода на треугольной направляющей

Прямая задача кинематики для рассматриваемого манипулятора состоит в определении координат положения и ориентациди подвижной платформы *ABC* (рис. 1), представляемых тремя линейными $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ и тремя угловыми φ, θ, ψ функциями положения относительно неподвижной системы координат. Формальная постановка прямой задачи состоит в том, что предполагаются заданными фиксированные положения точек *M*, *N* и *P* вершин треугольного гибридного привода, определяющих направляющие *MN*, *NP* и *PM* для подвижных точек D_i(i=1,2,..,6) управляемых модулей, положение которых задаётся управляющими функциями положения. Необходимо определить функции положения и ориентации платформы *ABC* в зависимости от управляющих функций и топологии механизма параллельной кинематики.

С учётом того, что плоскость треугольника *MNP* совмещена с координатной плоскостью x_0Oy_0(рис. 2) получим координатное представление этих точек в виде: $M(x_M, y_M, 0)$; $N(x_N, y_N, 0)$; $P(x_P, y_P, 0)$. Не нарушая общности решения прямой задачи примем линейные размеры сторон треугольника *ABC* равными между собой и равными *a*. Длины промежуточных звеньев, шатунов механизма параллельной кинематики, примем тоже равными между собой и равными *l*, то есть $D_1A=D_2A=D_3B=D_4B=D_5C=D_6C=l$. По этим исходным данным будем решать позиционную прямую задачу кинематики, заключающуюся в нашем случае в нахождении положения точек *A*, *B* и *C* подвижной треугольной платформы *ABC*, выраженных в неподвижной системе координат $S_0(x_0,y_0,z_0)$.

Для решения поставленной задачи вначале необходимо получить аналитическое параметрическое задание положения шести подвижных линейных модулей, характеризуемых положением точек D_i(i=1,2,...,6) в системе координат S_0. Для этого в системе координат S_0 зададим направляющие векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ перемещений спаренных подвижных линейных модулей по направляющим MN, NP и PM.

На основании условия коллинеарности соответствующей направляющей и вектора перемещения, расположенного на ней линейного подвижного модуля (рис. 2) окончательно получим параметрическое представление положения точек D_i(i=1,2,…,6) в виде:

$$\begin{aligned}
&x_{D_1} = \lambda_1(x_N - x_M) + x_M;\ y_{D_1} = \lambda_1(y_N - y_M) + y_M;\\
&x_{D_2} = \lambda_2(x_N - x_M) + x_M;\ y_{D_2} = \lambda_2(y_N - y_M) + y_M;\\
&x_{D_3} = \lambda_3(x_P - x_N) + x_N;\ y_{D_3} = \lambda_3(y_P - y_N) + y_N;\\
&x_{D_4} = \lambda_4(x_P - x_N) + x_N;\ y_{D_4} = \lambda_4(y_P - y_N) + y_N;\\
&x_{D_5} = \lambda_5(x_M - x_P) + x_P;\ y_{D_5} = \lambda_5(y_M - y_P) + y_P;\\
&x_{D_6} = \lambda_6(x_M - x_P) + x_P;\ y_{D_6} = \lambda_6(y_M - y_P) + y_P,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\lambda_i (i = 1,2,...,6)$ - параметры, определяющие положения соответствующих точек D_i(i=1,2,…,6) на направляющих треугольного гибридного привода.

Для формирования математической модели решения прямой задачи кинематики [2], через переменный угол α_1, для рассматриваемой в статье системы перемещений рассмотрим фрагмент исполнительного механизма D_1AD_2.

Рассмотрим вывод базовой системы из трёх уравнений, анализируя параллельный фрагмент D_1AD_2. Для этого для вектора $\vec{q}_1$ найдём его орт $\vec{q}_1^{\,0}$ по выражению:

$$\vec{q}_1^{\,0} = (m_1, n_1) = \left(\frac{x_N - x_M}{MN}, \frac{y_N - y_M}{MN}, 0\right), \text{ где } MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}. \tag{2}$$

С учётом найденных ортов по геометрической модели окончательно получим искомые координаты точки A через обобщённую координату α_1:

$$\begin{aligned}
&x_A = \frac{1}{2}(x_{D_1} + x_{D_2}) - n_1 AT_1 \cos\alpha_1;\\
&y_A = \frac{1}{2}(y_{D_1} + y_{D_2}) + m_1 AT_1 \cos\alpha_1;\\
&z_A = AT_1 \sin\alpha_1,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $AT_1 = \sqrt{AD_1^2 - \frac{1}{4}((x_{D_1} - x_{D_2})^2 + (y_{D_1} - y_{D_2})^2)}$.

Аналогичные расчётные модели могут быть использованы при алгоритмизации двух других фрагментов исполнительного механизма D_3BD_4 и D_5CD_6, которые являются подобными по кинематике фрагменту D_1AD_2. В результате математические модели формирования обобщённых координат α_1 и α_2 будут отличаться только на уровне обозначений используемых переменных. В первом случае вместо α_1 будем использовать α_2, а во втором – α_3.

Расчётные координаты точек A, B и C из приведенных расчётных формул позволяют получить систему нелинейных уравнений относительно неизвестных α_1, α_2 и α_3 в виде формулы (4).

$$\begin{cases}
(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2;\\
(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2;\\
(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = a^2.
\end{cases} \tag{4}$$

В результате решения полученной системы (4) находим текущие значения углов α_1, α_2 и α_3 однозначно соответствующие текущим положениям точек D_i(i=1,2,…,6). Подставляя найденные значения α_1, α_2 и α_3 в расчётные формулы для нахождения координат точек точек A, B и C, а значит получим текущее положении и ориентацию подвижного треугольного звена ABC в трёхмерном пространстве.

Последующее компьютерное моделирование [3] позволит получить необходимые характеристики конкретной системы перемещений, включающие геометрию рабочей области, калибровку траекторий по скорости и точности, выбор оптимальных траекторий в зависимости от характера технологической операции.

Список использованных источников:

1. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
2. Прикладные задачи по высшей математике: Аналитическая геометрия : учеб.-метод. пособие / С.Е. Карпович [и др.]. – Минск : БГУИР, 2013. – 64 с.
3. Моделирование механизмов параллельной кинематики в среде MATLAB/Simulink / С.Е. Карпович [и др.]. – Минск : Бестпринт, 2013. – 153 с.