ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лещёв А. Е.

Минченко Л. И. – д-р. физ.-мат. наук, профессор

Рассмотрим возмущенную задачу $NLP(x)$ нелинейного программирования: $f(x,y) \to \inf\limits_{y}$

где $y \in F(x) = \left\{ y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0, \quad i \in I \ , \quad h_i(x,y) = 0, \quad i \in I_0 \right\}$,

$x \in R^n$ - вектор параметров, $I = \{1,...,s\}$, $I_0 = \{s+1,...,p\}$, функции f, h_i, *i=1,…, p* непрерывно дифференцируемы.

Обозначим через *F* - многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in R^n$ множество $F(x) \subset R^m$, через $domF = \{x \in R^n \mid F(x) \ne \varnothing\}$ область определения многозначного отображения F, через $grF = \{(x,y) \mid y \in F(x), \quad x \in R^n\}$ график этого отображения и будем считать, что фиксированы некоторое номинальное значение вектора параметров $x^0 \in domF$ и некоторое направление в R^n, заданное вектором $\bar{x} \in R^n$.

Обозначим множество оптимальных решений задачи $NLP(x)$

$$\omega(x) = \left\{ y \in F(x) \mid f(x,y) = \varphi(x) \right\}$$

в дальнейшем будем предполагать, что множество $\omega(x^0 + t\bar{x})$ не пусто и равномерно ограниченно для всех достаточно малых $t \ge 0$. Последнее означает, что существуют число $t_0 > 0$ и ограниченное множество $Y_0 \subset R^m$ такие, что $\omega(x^0 + t\bar{x}) \subset Y_0$ при всех $t \in [0, t_0]$.

Представляет интерес исследование изменения оптимального значения целевой функции в задаче $NLP(x)$ при возмущении номинального значения вектора параметров вдоль выбранного направления $\bar{x}$ и переходе его к близким значениям $x = x^0 + t\bar{x}$, где $t \ge 0$.

Для этого введем функцию оптимального значения

$$\varphi(x) = \inf \left\{ f(x,y) \mid y \in F(x) \right\}.$$

Очевидно, значение производной по направлению $\bar{x}$ для функции φ в точке x^0 является оценкой изменения оптимального значения целевой функции в данном направлении. В соответствии с этим, представляет интерес выделение задач, для которых производная по направлению

$$\varphi'(x^0;\bar{x}) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}[\varphi(x^0 + t\bar{x}) - \varphi(x^0)]$$

существует, и вычисление данных производных.

Для функции φ введем также, следуя В.Ф.Демьянову, вторую производную функции φ в точке x^0 по направлению :

$$\varphi''(x^0;\bar{x}) = \lim_{t \downarrow 0} 2t^{-2}(\varphi(x^0 + t\bar{x}) - \varphi(x^0) - t\varphi'(x^0;\bar{x})) .$$

В качестве основной идеи предложено новое условие (ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению или $RMF_{\bar{x}}$), более слабое по своим требованиям по сравнению с введенным Голланом условием Мангасаряна-Фромовица по направлению ($MF_{\bar{x}}$). Применение данного условия вместо $MF_{\bar{x}}$ позволяет обобщить результаты Шапиро, Боннанса, Ауслендера и Коминетти.

Обозначим $z^0 = (x^0, y^0)$, где $y^0 \in F(x^0)$, $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Пусть

$$\Gamma(z^0;\bar{x}) = \left\{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(z^0), \bar{z} \rangle \le 0, \quad i \in I(z^0), \quad \langle \nabla h_i(z^0), \bar{z} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \right\} \ne \varnothing.$$

Представим множество индексов $I(z^0)$ активных в точке $z^0 = (x^0, y^0)$ ограничений типа неравенства в задаче $NLP(x)$ в виде $I(z^0) = I^a(z^0,\bar{x}) \cup I^+(z^0,\bar{x})$, где

$$I^a(z^0,\bar{x}) = \{ i \in I(z^0) \mid \langle \nabla h_i(z^0), (\bar{x},\bar{y}) \rangle = 0, \quad \forall \bar{y} \in \Gamma(z^0;\bar{x}) \},$$
$$I^+(z^0,\bar{x}) == I(z^0) \setminus I^a(z^0,\bar{x}).$$

Положим $z=(x,y)$. Введем функцию Лагранжа $L(z,\lambda)=f(z)+\langle\lambda,h(z)\rangle$, где $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_p)$, $h=(h_1,...,h_p)$, и обозначим через $\Lambda(z)=\{\ \lambda\in R^p \mid \nabla_y L(z,\lambda)=0,\ \lambda_i\geq 0$ и $\lambda_i h_i(z)=0,\quad i\in I\ \}$ множество множителей Лагранжа.

Определение 1. Будем говорить, что в точке $z^0=(x^0,y^0)$ выполнено *ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению* $\bar{x}$ (коротко $RMF_{\bar{x}}$), если $\Gamma(z^0;\bar{x})\neq\varnothing$ и система векторов

$$\begin{pmatrix}\nabla_y h_i(z)\\ \langle\nabla_x h_i(z),\bar{x}\rangle\end{pmatrix},\quad i\in I_0\cup I^a(z^0,\bar{x})$$

имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки z^0.

Введем множества

$$\Gamma^*(z;\bar{x})=\{\bar{y}^*\in\Gamma(z;\bar{x})\Big|\langle\nabla f(x,y),(\bar{x},\bar{y}^*)\rangle=\min_{\bar{y}\in\Gamma(z;\bar{x})}\langle\nabla f(x,y),(\bar{x},\bar{y})\rangle\},$$

$$\Lambda^2(z;\bar{x})=\{\lambda\in\Lambda(z)\mid\langle\nabla_x L(z,\lambda),\bar{x}\rangle=\max_{\lambda\in\Lambda(z)}\langle\nabla_x L(z,\lambda),\bar{x}\rangle\},$$ где $z=(x,y)\in grF$,

а также

$$\omega(x^0,\bar{x})=\{y^0\in\omega(x^0)\Big|\varphi'(x^0;\bar{x})=\min_{y^0\in\omega(x^0)}\ \min_{\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})}\langle\nabla f(z^0),\bar{z}\rangle\}.$$

Определение 2. Будем говорить, что в точке $z^0=(x^0,y^0)\in grF$ выполнено *сильное достаточное условие второго порядка по направлению* $\bar{x}$ ($SSOSC_{\bar{x}}$), если $\Lambda(z^0)\neq\varnothing$ и $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda^2(z^0;\bar{x})}\langle\bar{y},\nabla^2_{yy}L(z^0,\lambda)\bar{y}\rangle>0$ для всех ненулевых векторов $\bar{y}\in\hat{D}(z^0)=\{\bar{y}\in\Gamma(z^0;0)\ \mid\ \langle\nabla_y f(z^0),\bar{y}\rangle\leq 0\}$.

Определение 3. Будем говорить, что в точке $z^0=(x^0,y^0)\in grF$ выполнено равномерно ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению $\bar{x}$ ($URMF_{\bar{x}}$), если $\Gamma(z^0;\bar{x})\neq\varnothing$ и любая система векторов $\begin{pmatrix}\nabla_y h_i(z)\\ \langle\nabla_x h_i(z),\bar{x}\rangle\end{pmatrix}$, $i\in I_0\cup K$, где $K\subset I^a(z^0)$, не меняет ранг при всех z из некоторой окрестности точки z^0.

Теорема. Пусть во всех точках $z^0=(x^0,y^0)$ таких, что $y^0\in\omega(x^0)$, выполнены условия $URMF_{\bar{x}}$ и $SSOSC_{\bar{x}}$. Тогда функция φ дважды дифференцируема в точке x^0 по направлению $\bar{x}$, причем

$$\varphi'(x^0;\bar{x})=\min_{y^0\in\omega(x^0)}\ \min_{\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})}\langle\nabla f(z^0),\bar{z}\rangle=\min_{y^0\in\omega(x^0)}\ \max_{\lambda\in\Lambda(z^0)}\langle\nabla_x L(z^0,\lambda),\bar{x}\rangle;$$

$$\varphi''(x^0;\bar{x})=\inf_{y^0\in\omega(x^0,\bar{x})}\ \inf_{\bar{y}\in\Gamma^*(z^0;\bar{x})}\ \sup_{\lambda\in\Lambda^2(z^0,\bar{x})}\langle\bar{z},\nabla^2 L(z^0,\lambda),\bar{z}\rangle,$$

где $z^0=(x^0,y^0)$, $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})$.

Список использованных источников:

1. Демьянов, В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. М.: Наука, 1972. – 367с.
2. Bonnans, J. F. Perturbations analysis of optimization problems / J. F. Bonnans, A. Shapiro. – New York: Springer-Verlag, 2000.
3. Shapiro, A. Sensitivity analysis of nonlinear programs and differentiability properties of metric projections / A. Shapiro // SIAM J.Control and Optimization. – 1988. - V.26. - P.628-645.