ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНИРОВАННУЮ АРИФМЕТИКУ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Уваров Н.С.

Петровский А.А.- д.т.н., профессор

Известно обобщение из действительной к комплексной арифметики (два вещественных числа) распространяется далее на более неясную арифметику кватернионов (четыре вещественных числа), которая находит применение в обработке сигналов, аэрокосмических приложениях, графики и виртуальной реальности. Умножение кватернионов реализуется 3D вращением, но оно затратное (обычно 16 умножений с плавающей точкой и 12 сложений). В статье рассматривается альтернативное представление кватернионов, используя логарифмы, чтобы уменьшить затраты умножения.

Как логарифмы, так и кватернионы почтенные математические понятия; когда открылись, каждый произвёл революцию и правил вековой наукой и техникой, как с теоретической, так и практической (ручной вычислительной) точки зрения. В этой статье рассматривается возможность объединения кватернионов с логарифмической системой счисление (ЛСЧ). Потребность такого подхода возникает в различных приложениях, таких как анимационная графика, виртуальная реальность, робототехника, системы управления.

Альтернативный способ, известный как конструкция Кэли-Диксона [1], [2], чтобы определить кватернион необходимо начать с пары комплексных значений, $\overline{Q_0} = Q_{00} + Q_{01}i$ и $\overline{Q_1} = Q_{10} + Q_{11}i$, каждый из которых содержит половину информации кватерниона. В то время как такое представления Кэли-Диксона было использовано для построения умножителя кватернионов в прямоугольной форме [1] и использовалось, чтобы предложить полярное представление альтернативное одного угла (с помощью комплексного угла в [2], а не действительных углов, используемых в этой работе). $Q = \overline{Q_0} + \overline{Q_1}j = (Q_{00} + Q_{01}i) + (Q_{10} + Q_{11}i)j = = Q_{00} + Q_{01}i + Q_{10}j + Q_{11}k$, таким образом, как известно, $ij = k$ дает четвертый элемент прямоугольного представления кватернионов. Для формирования сопряженного кватерниона Q в этом представлении требуется комплексное сопряжённое число, $\overline{Q_0^*}$ и комплексно отрицательное, $-\overline{Q_1^*}$. Для формирования отрицательного просто требует отрицание обеих частей: $-\overline{Q_0}$ и $-\overline{Q_1}$. Указанные два кватерниона, каждый из которых представлен парой комплексных значений, Q и аналогично $P = \overline{P_0} + \overline{P_1}j$, результат, R, умножения P на Q может быть описан в виде набора комплексных операций: $\overline{R_0} = \overline{P_0}\,\overline{Q_0} - \overline{P_1}\,\overline{Q_1^*}$ $\overline{R_1} = \overline{P_0}\,\overline{Q_1} + \overline{P_1}\,\overline{Q_0^*}$. За исключением присутствия сопряженных операций, этот алгоритм похож на прямоугольный алгоритм умножения.

Новая концепция в этой статье, которую называют кватерниононная комплексная ЛСЧ (ККЛСЧ)[3], заключается в замене прямоугольное представление для комплексных переменных: $\overline{Q_0} = Q_{00} + Q_{01}i$, $\overline{Q_1} = Q_{10} + Q_{11}i$, $\overline{P_0} = P_{00} + P_{01}i$. $\overline{P_1} = P_{10} + P_{11}i$, с представлением КЛСЧ при тех же значениях: $\overline{Q_0} = \beta^{q_{00}} cis(q_{01})$, $\overline{Q_1} = \beta^{q_{10}} cis(q_{11})$, $\overline{P_0} = \beta^{p_{00}} cis(p_{01})$, $\overline{P_1} = \beta^{p_{10}} cis(p_{11})$.

Было показано, что два самых естественных способа, которые можно было бы попытаться использовать с ЛСЧ для умножения кватернионов не эффективны: во-первых, функция кватернионного логарифма не поможет упростить умножение, потому что умножение кватернионов не коммутативно, но сложение кватернионов коммутативно; во-вторых, с помощью ЛСЧ для двенадцати сложений / вычитаний, участвующих в прямоугольном определении умножения кватернионов гораздо дороже, чем при использовании плавающей запятой[3]. Чтобы преодолеть это, было предложено новое представление, ККЛСЧ, для кватернион, Q, используя пару комплексных чисел в конструкции Кэли-Диксона, нового подхода, который каждое комплексное число представляет в КЛСЧ в логарифмическо-полярной форме. Простой реализацией с этим представлением нужны четыре КЛСЧ умножителя и два КЛСЧ сумматора, а так как ККЛСЧ сумматоры имеют общие подвыражения, оборудование может быть оптимизировано до эквивалента около 5,5 ЛСЧ сумматоров и один ЛСЧ сумматор / вычитатель. Эти особенности могут извлечь выгоду в встраиваемых системах, которые интенсивно используют кватернионы в играх и навигации.

Список использованных источников:

1. M. Parfieniuk and A. Petrovsky, “Quaternion Multiplier Inspired by the Lifting Implementation of Plane Rotations,” IEEE Transactions on Circuit and Systems I: Regular Papers, vol. 57, no. 10, pp. 2708–2717, Oct. 2010.
2. S. J. Sangwine and N. Le Bihan, “Quaternion Polar Representation with a Complex Modulus and Complex Argument Inspired by the Cayley-Dickson Form,” Advanced Applied Clifford Algebra, vol. 20, pp. 111–120, 2010.
3. M.G. Arnold, J Cowles, V. Paliouras, I. Kouretas, “Towards a Quaternion Complex Logarithmic Number System,” 2011 20th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, pp. 33–42, 2011.

Библиотека БГУИР