СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Балюк Д. А., Силюк А. А.

Мокеева О. А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Ничто не происходит без достаточного основания
М. В. Ломоносов

В научных исследованиях, да и просто в жизни часто приходится сталкиваться с величинами, которые принимают различные значения в зависимости от случайных обстоятельств. Например, количество звонков, поступивших на телефонную станцию в течение ближайшего часа, величина спроса на некий товар в течение определенного промежутка времени, число очков, выпавших при одном броске игрального кубика, и т. д. При попытке хотя бы приближенно оценить значения этих величин или подобных им можно столкнуться с некоторыми, а иногда и с достаточно большими трудностями. Величины, значения которых зависят от некоторых случайностей, естественно считать случайными.

Всей деятельности человека присущ элемент случайности. Случай, случайность – с ними мы встречаемся повседневно: случайная встреча, случайная поломка, случайная находка, случайная ошибка. Этот ряд можно продолжать бесконечно. Но даже во всякой случайности есть доля закономерности. Поэтому так важно знать возможные последствия принимаемых решений. Из-за этого теория вероятностей и математическая статистика играют все более значительную роль в нашей жизни.

Различные области науки сталкиваются со случайными явлениями, когда заранее невозможно предсказать результат опыта. Теория вероятностей занимается изучением закономерностей в случайных явлениях и процессах. Хотя исторически зарождение и развитие теории вероятностей связано с азартными играми, именно теории вероятностей суждено было сыграть решающую роль в переходе науки от изучения детерминированных явлений и опытов к исследованию случайных явлений и процессов.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Случайная величина – это величина, принимающая те или иные значения, в зависимости от случая. Величина, которая в результате испытаний (измерений, наблюдений), как бы мы ни старались сделать однородными их условия, может принимать неодинаковые числовые значения. Неодинаковость этих значений объясняется наличием случайных различий, имеющих все же место в условиях этих испытаний; эти различия являются проявлением факторов, недоступных нашему контролю, или факторов, сознательно нами не учитываемых.

Случайные величины бывают двух основных типов:

1) дискретные; это – случайные величины, возможные значения которых образуют дискретное числовое множество, т. е. конечное или бесконечное множество, состоящее из изолированных друг от друга числовых значений;

2) непрерывные; это – случайные величины, возможные значения которых заполняют целиком некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой оси.

Так как разные значения случайной величины можно рассматривать как события, а, как известно, случайные события имеют вероятность, то и значения случайной величины имеют также свои вероятности. В этом и проявляется «случайный» характер случайной величины. Для полного определения случайной величины необходимо указать какое-либо правило нахождения вероятностей значений этой случайной величины, т. е. задать ее закон распределения.

Теория вероятностей трудна для понимания и овладения. Это действительно так. Многие считают ее абстрактной и далекой от повседневных дел и занятий, но на самом деле, это не так. Мы сталкиваемся с теорией вероятностей весьма часто.

Пример.

Необходимо оценить вероятность взлома графического пароля для доступа к *ОС Android*. Графический пароль представляет собой последовательность из N элементов матрицы 3×3, где N принимает значения от 5 до 9 включительно, что является траекторией движения пальца по экрану устройства. Пусть одно соединение i – го и $(i+1)$ – го элемента будет называться «шагом», значит, по условию надо рассматривать от 4-х до 8-ми шагов.

Дополнительное условие: $(i+1)$ – ый элемент должен быть в прямой видимости по отношению к i – ому элементу, то есть нельзя соединить а11 и а33 за 1 шаг, так как, чтобы попасть ко второму элементу, необходимо сделать 2 шага: а11 $\rightarrow$ а22, а22 $\rightarrow$ а33.

Пусть случайная величина X – количество попыток, которое понадобилось, чтобы подобрать пароль к системе. Будем рассматривать все виды паролей по отдельности.

Для примера разберем 5-значный графический пароль. При помощи алгоритма написанной программы было установлено, что существует 7152 последовательности, удовлетворяющие условию задачи. Так как нам необходимо «угадать» одну из них, то $p = 1/7152$, следовательно $q = 1 - p = 7151/7152$.

X – дискретная случайная величина, имеет 7152 возможных значения: $\{1, 2, \ldots 7152\}$. Найдем их вероятности начиная с p_1: $p_1 = P\{X = 1\}$.

Знаком « $+$ » будем обозначать успешный подбор пароля, знаком « $-$ » – неудачный.

Для того чтобы достаточно было попробовать угадать пароль 1 раз, нужно, чтобы первая попытка оказалась успешной: $p_1 = P\{+\} = P\{X = 1\} = p$.

Найдем $p_2 = P\{X = 2\}$. Чтобы подбор прекратился после второй попытки, нужно, чтобы первая попытка была неуспешной, а вторая – успешной: $p_2 = P\{-+\} = P\{X = 2\} = (1 - p) \cdot p$, или обозначая вероятность неуспешного тестирования $1 - p = q,\ p_2 = qp$.

Аналогично найдем $p_i = P\{\underbrace{- - - \ldots - +}_{(i-1)\ \text{ðàç}}\} = P\{X = i\} = q^{i-1} \cdot p$.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

X	1	2	…	i	…
P	p	qp	…	$q^{i-1} \cdot p$	…

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. На самом деле $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \cdot p = \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} q^i$, и, суммируя бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом q и знаменателем $q < 1$, имеем $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \cdot p = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{1-q} = 1$.

Построив функцию распределения данной случайной величины можно сделать вывод, что если мы попытаемся 1000 раз подобрать 5-значный графический пароль для *ОС Android*, то вероятность нашего успеха будет приблизительно равна 15%.

Студенты многое знают о теории вероятностей на интуитивном уровне. Изучение закрепит, прояснит и расширит знания, добавив много принципиально нового. Методы теории вероятностей используются во многих областях науки. Именно теория вероятностей служит обоснованием математической и прикладной статистики. Поэтому так важно владеть всем арсеналом методов теории вероятностей. Приобретаемые знания и умения являются востребованными при изучении специальных дисциплин и в будущей профессии.

Список использованных источников:

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров // Учеб. пособие для студ. вузов, 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 409 с.
2. http://www.wolframalpha.com