ИМИТАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Блеблю Мариам Салем Ибрагим (Ливия)

Волорова Н. А. – канд. техн. наук, доцент

Характерной особенностью сложных систем является воздействие большого числа случайных факторов на систему в процессе ее функционирования. Сложность процессов, протекающих в системе, приводит, как правило, к тому, что аналитическое описание влияния случайных факторов либо невозможно, либо имеет слишком упрощенный характер. Поэтому, для оценки качества функционирования сложной системы в процессе ее проектирования используются методы статистического и имитационного моделирования.

Одним из элементов имитационной модели, определяющим качество ее функционирования являются компоненты, обеспечивающие формирование случайных величин, имитирующих случайные факторы. Опыт создания систем имитационного моделирования показывает, что одной из проблем, возникающих при решении задач исследования и испытаний сложных систем методами имитационного моделирования, является необходимость формирования большого числа случайных величин. В ряде случаев время, затрачиваемое только на формирование случайных воздействий, составляет до 50% от общего времени решения задачи. В связи с этим актуальной является задача разработки эффективных алгоритмов, обеспечивающих формирование случайных величин с требуемыми статистическими характеристиками и точностью их воспроизведения.

В настоящее время достаточно полно разработаны вопросы построения генераторов одномерных случайных величин, однако, реальные случайные факторы, воздействующие на системы в процессе их функционирования, как правило, не являются независимыми и для адекватного их воспроизведения необходимо формировать совокупность случайных воздействий с заданными взаимными статистическими связями. Решение данной задачи возможно лишь при использовании методов и средств имитации многомерных случайных воздействий, позволяющих формировать совокупности статистически взаимосвязанных случайных процессов с заданными характеристиками.

Известные методы формирования многомерных случайных величин не оптимальны с точки зрения возможности создания эффективного алгоритма, пригодного для использования в системах имитационного моделирования, т.к. их реализация в ряде случае связана со сложными аналитическими преобразованиями или в них используется несколько исходных случайных процессов. Поэтому, для имитации многомерных случайных величин целесообразно применять алгоритмы формирования одномерных случайных величин, использующие один случайный процесс и допускающие параллельное формирование разрядов случайной величины. В связи с этим возникает задача перехода от многомерной функции распределения вероятностей к эквивалентной ей одномерной функции распределения и последующем преобразовании значений одномерной случайной величины в значения составляющих случайного вектора. Эквивалентными будем называть две такие функции распределения вероятностей $\boldsymbol{F(x_1,\dots,x_n)}$ и $F^*(y)$ случайных величин $\bar{X}$ и Y, значения которых равны на взаимно соответствующих значениях аргументов ẍ и y.

Для перехода от многомерной функции распределения $\boldsymbol{F(x_1,\dots,x_n)}$ к эквивалентной одномерной функции $F^*(y)$ представим функцию $\boldsymbol{F(x_1,\dots,x_n)}$ в новой системе координат y, связанной с *x* соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + \cdots + S_n \cdot x_n \\ y_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n \quad (S_i > 0, \quad i = 1, \dots, N) \\ \dots \\ y_1 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n \end{cases} \qquad (1)$$

Инвариантное преобразование позволяет перейти к эквивалентной одномерной функции распределения вероятностей и использовать при формировании случайной величины алгоритм имитации одномерных случайных величин, обеспечивающее высокое быстродействие и минимальное количество исходных факторов.

Для обеспечения однозначного соответствия между значениями y_1 и значениями составляющих многомерной случайной величины $\boldsymbol{x_1,\dots,x_n}$необходимо выполнение условий

$$S_i \cdot x_{imax} < S_{i+1min} \cdot x_{i+1min} \qquad (2)$$
$$(x_i \neq 0, i = 1, \dots, N)$$

Полагаем, что составляющие многомерной случайной величины $x_i \in [0,1[, (i = 1,\dots,N)$ и каждая из составляющих X_i задается r_i-разрядным двоичным кодом. В этом случае минимальное число возможных значений для переменной y_1 равно

$n = 2^{\sum_{i=1}^{N} r_i}$.

Полагаем, $S_N=2^0=1$, тогда

$$\left.\begin{aligned} S_N &= 2^0 \\ S_{N-1} &= 2^{-r_N} \\ S_{N-2} &= 2^{-(r_N+r_{N-1})} \\ &\dots \\ S_1 &= 2^{-\sum_{i=2}^{N} r_i} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Очевидно, что при задании коэффициентов S_i (i=1, …, N) согласно соотношениям (3) множество возможных значений y_1 содержит $n = 2^{\sum_{i=1}^{N} r_i}$ точек.

Рассмотрим обратное преобразование $Y_1 \to \bar{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$. Множество Y_1 содержит элементы y_1

$$Y_1 = \left\{ y_1 / y_1 = \sum_{i=1}^{N} S_i \cdot \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j 2^{-j}; \alpha_j = 0{,}1 \right\} \qquad (4)$$

Введем множества H_1, …, H_N, определяемые следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &\equiv y_1 \quad (mod\, S_1) \\ H_2 &\equiv (y_1 \backslash S_1 \times H_1) \quad (mod\, S_2) \\ &\dots \\ H_N &\equiv (y_1 \backslash S_1 \times H_1 \backslash S_2 \times H_2 \backslash \cdots \backslash S_{N-1} \times H_{N-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

В соответствии с (5) множество Y_1 задается через множества H_1, …, H_N соотношением

$$Y_1 \equiv S_1 \times H_1 \cup S_2 \times H_2 \cup \cdots \cup S_N \times H_N \qquad (6)$$

Из выражений (4) и (5) следует, что

$$\left.\begin{aligned} H_1 &\equiv X_1 = \left\{ x_1 \,\middle|\, x_1 = \sum_{j=1}^{r_1} a_j \cdot 2^{-j}; a_j = 0{,}1 \right\} \\ H_2 &\equiv 2 = \left\{ x_2 \,\middle|\, x_2 = \sum_{j=1}^{r_2} a_j \cdot 2^{-j}; a_j = 0{,}1 \right\} \\ &\dots \\ H_N &\equiv X_N = \left\{ x_N \,\middle|\, x_N = \sum_{j=1}^{r_N} a_j \cdot 2^{-j}; a_j = 0{,}1 \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Таким образом, преобразование значений эквивалентной одномерной случайной величины Y_1 в значения составляющих многомерной случайной $\bar{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$ осуществляются путем выполнения следующих операций:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left\{ \frac{y_1}{S_1} \right\} \\ x_2 &= \left\{ \frac{y_1 - S_1 \cdot x_1}{S_2} \right\} \\ &\dots \\ x_1 &= \left\{ \frac{y_1 - \sum_{i=1}^{N-1} S_i \cdot x_i}{S_N} \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Символом {·} обозначена дробная часть числа; значения каждой из составляющих $\bar{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$ получаются путем разделения l-разрядного кода y_1 на N сегментов, длина каждого из которых равна r_i (i=1, …, N):

$$\begin{aligned} y_1 &= \underbrace{x_N}_{r_N} \underbrace{x_{N-1}}_{r_{N-1}} \cdots \underbrace{x_1}_{r_1} \\ l &= \sum_{i=1}^{N} r_i \end{aligned} \qquad (9)$$

Отметим, что соотношения (9) получены для области возможных значений $x_i \in [0,1[, (i = 1, \dots, N)$. Однако, это допущение не нарушает общности вывода, так как с помощью операции масштабирования можно перейти от многомерной случайной величины $\bar{Z}$, описываемой плотностью распределения $f_z(z_1, \dots, z_N)$ ($z_i \in (a_i, b_i)$) к многомерной случайной величине $\bar{X}$, описываемой плотностью распределения $f_x(x_1, \dots, x_N)$ ($x_i \in [0,1[$ (i=1, …, N)), полагая

$$x_i = \frac{z_i - a_i}{b_i - a_i}, (i = 1, \cdots, N). \qquad (10)$$

Таким образом, рассмотренное представление многомерной случайной величины позволяет:

- при формировании многомерных случайных величин использовать алгоритмы формирования многомерных случайных величин за счет предварительного преобразования многомерной функции распределения вероятностей в эквивалентную ей одномерную функцию; при этом необходимое быстродействие обеспечивается выбором соответствующего алгоритма формирования одномерных случайных величин;
- использовать один исходный случайный процесс для имитации многомерных случайных величин;
- выполнять преобразование эквивалентной одномерной случайной величины Y в многомерную случайную величину Ẍ путем разбиения двоичного числа на группы разрядов без аппаратурных и временных затрат.

Из вышеизложенного следует сделать вывод о возможности разработки алгоритмов формирования многомерных случайных величин, ориентированных на использование в системах имитационного моделирования.