ОСЛАБЛЕННОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ МАНГАСАРЯНА-ФРОМОВИЦА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лещёв А.Е.

Минченко Л.И. – д-р физ.-мат. наук, профессор

Пусть $y \in C$.

Представим множество индексов $I(y)$ активных ограничений в виде

$I(y) = I^a(y) \cup I^-(y)$, где

$I^a(y) = \{i \in I(y) \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in \Gamma_C(y)\}, \quad I^-(y) = I(y) \setminus I^a(y)$

Определение 1 [1]. Говорят, что в точке $y \in C$ выполняется ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, если система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки и существует вектор $\bar{y}_0$, такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^-(y)$.

Лемма 1. *Пусть $y \in C$. Следующие утверждения равносильны:*

(а) система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y и существует вектор $\bar{y}_0$, такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^-(y)$;

(б) система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y.

Доказательство. Очевидно, что из утверждения (а) вытекает утверждение (б). Обратно, пусть выполнено (б). Тогда система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в окрестности точки y и первое условие утверждения (а) выполнено. Проверим выполнение второго условия из утверждения (а). В случае если $I^-(y) = \varnothing$, оно будет выполнено тривиально. Пусть $I^-(y) \neq \varnothing$. Возьмем любой индекс $i \in I^-(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, но индекс $i \notin I^a(y)$, то есть, найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$, такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор

$$\bar{y}^0 = \sum_{k \in I^-(y)} t_k \bar{y}^k ,$$

где все $t_k > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$, и для любого $i \in I^-(y)$ получим

$$\left\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \right\rangle = \sum_{k \in I^-(y)} t_k \left\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^k \right\rangle = \sum_{k \in I^-(y) \setminus i} t_k \left\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^k \right\rangle + t_i \left\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \right\rangle < 0.$$

Следовательно, и в этом случае второе условие из утверждения (а) выполнено. Таким образом, определению условия RMFCQ можно придать следующий вид.

Определение 2. Будем говорить, что в точке $y \in C$ выполнено условие регулярности RMFCQ, если система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Под таким определением в работе [2] введено условие регулярности, коротко называемое CRSC. Лемма 1 показывает, что условие CRSC является другой формой записи условия RMFCQ.

Условие RMFCQ, очевидно, выполняется при выполнении условия постоянного ранга CRCQ (а также RCRCQ). Частным случаем условия RMFCQ является условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ), а также его легкая модификация (обозначим ее EMFCQ), которая сводится к требованиям:

1) система векторов $\{\nabla h_i(y),\ i \in I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y;

2) существует вектор $\bar{y}_0$, такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0, \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I(y)$.

Из результатов [2] следует, что ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица является также более слабым условием регулярности по сравнению с условиями CPLD и RCPLD [6-8].

Введем множество вырожденных множителей Лагранжа в точке $y \in C$:

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in R^p \mid +\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0,\ \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(y),\ \lambda_i = 0 \quad i \in I \setminus I(y)\}.$$

Лемма 2. Если $J \subset I^a(y)$, то существует вектор $\lambda \in \Lambda_0(y)$ такой, что $\lambda_i \geq 1$ для $i \in J$.

Доказательство. В силу определения множества $I^a(y)$ неравенство $\langle -\nabla h_j(y), \bar{y} \rangle \leq 0$ при $j \in J$ является следствием системы неравенств и равенств, определяющих множество $\Gamma_C(y)$. Тогда в силу леммы Фаркаша [3] для любого $j \in J$ найдется вектор $\lambda^j \in \Lambda_0(y)$ такой, что

$$-\langle \nabla h_j(y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^j \nabla h_i(y).$$

Тогда

$$-\sum_{j \in J} \nabla h_j(y) = \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^j \nabla h_i(y) = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j \in J} \lambda_i^j) \nabla h_i(y)$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0 \text{ при } \lambda_i = (\sum_{j \in J} \lambda_i^j + 1).$$

Следуя [3], будем называть условие регулярности в точке $y \in C$ *хорошо обусловленным,* если из его выполнения в точке y следует, его выполнение в любой точке $v \in C$ из некоторой окрестности $V(y)$ точки y.

Следующее важное утверждение доказано в [2] (лемма 5.3 [3]).

Утверждение 1. *Пусть в точке $y_0 \in C$ выполнено условие RMFCQ. Тогда существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0, такая, что $I^a(y) = I^a(y_0)$ и $h_i(y) = 0 \quad i \in I^a(y_0)$ для всех $y \in C \cap V(y_0)$.*

Непосредственно из данного утверждения вытекает следствие.

Следствие 1. *Условие RMFCQ является хорошо обусловленным в любой точке, в которой оно выполняется.*

Список использованных источников:

1. Минченко Л.И., Стаховский С.М. // Доклады БГУИР, №8, 2010. С. 104–109.
2. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L. and Silva P.J. S. // SIAM J. Optimiz. 22, N3, 2012. P.1109-1135.
3. Minchenko L., Tarakanov A. //J. Optimiz. Theory and Appl., 148, 2011. P. 571–579.
4. Janin R. // Mathematical Programming Study. 21, 1984. P. 110-126.