РАЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ СПЕКТРОГРАММЫ ПИЛООБРАЗНОГО ЧИРП-СИГНАЛА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Дараган Е. Н.

Стройникова Е. Д. – ассистент кафедры информатики

Фракталы и фрактальные структуры привлекают внимание исследователей своими необычными свойствами и эстетической стороной. Тем не менее, фракталы хорошо описывают некоторые явления нашей жизни.

При изучении курса Фурье-анализа автор столкнулся с фрактальной структурой, создаваемой пилообразным сигналом с изменяющейся частотой (пилообразным чирп-сигналом) с неограниченным спектром. Также подобные структуры появляются при использовании вместо пилообразного сигнала прямоугольного, модуля $\sin(x)$ или любого другого, имеющего бесконечный спектр.

При дискретном Фурье-анализе из сигнала производятся выборки с частотой F_d, при этом максимальная частота сигнала, которую можно точно воспроизвести, ограничивается в соответствии с теоремой Котельникова частотой $F_d/2$ (частотой Найквиста). Т.к. спектр исследуемого сигнала не ограничен сверху $F_d/2$, то гармоники, частота которых выше $F_d/2$, но меньше F_d, попадают в т.н. вторую зону Найквиста и отображаются на исходном спектре как гармоники с частотой $F_d - f$, и становятся неотличимы от истинных гармоник, присутствующих на этой частоте. Это явление называется наложением спектров (англ. aliasing). Гармоники с частотой, большей F_d, но меньшей $3F_d/2$, попадают в т.н. вторую зону Найквиста с видимой частотой $f - 2F_d$; с частотой, большей $3F_d/2$, но меньшей $2F_d$, – в третью зону Найквиста с видимой частотой $3F_d - f$ и т.д. На рис. 1 показано, как это явление выглядит на спектрограмме для синусоидального чирп-сигнала.

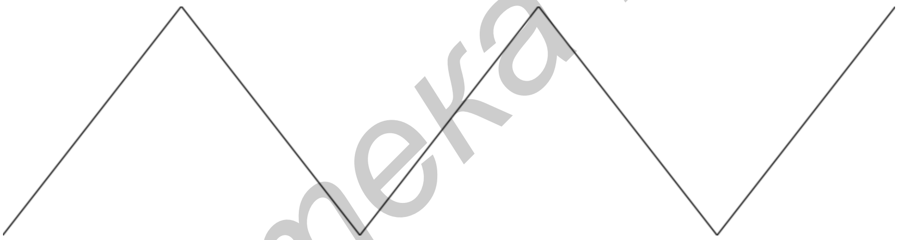

Рис. 1. Явление наложения частот в синусоидальном чирп-сигнале. Ось *x* – время, ось *y* – частота.

Однако при использовании сигнала с неограниченным спектром (например, пилообразного) отражению от границ Найквиста подвергаются все гармоники, что создает фрактальную структуру с самоподобными участками.

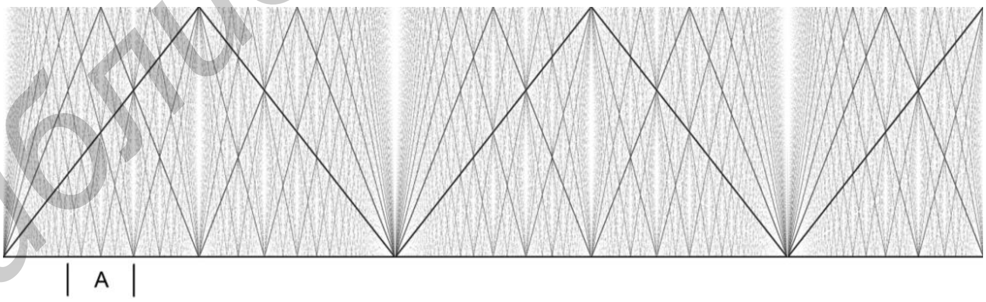

Рис. 2. Самоподобная структура на спектрограмме пилообразного чирп-сигнала. Ось *x* – время, ось *y* – частота.

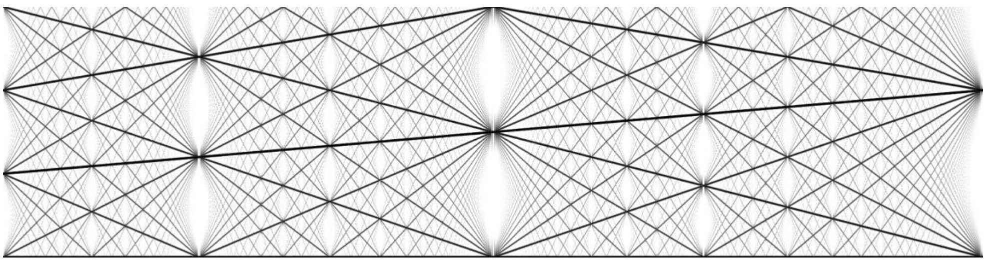

Рисунок 3. Увеличенный участок *A* из рисунка 1. Левая граница – $f = \frac{1}{6}F_d$, правая граница - $f = \frac{1}{3}F_d$.

Геометрический смысл такой структуры можно описать наложением бесконечного числа прямых, отражающихся от верхних и нижних границ изображения:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} k_i(x)\,, x \in [0,1], i \in N$$

$$k_i(x) = (-1)^{\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor}\, i\,(x + \lfloor (x+1)/2i \rfloor)$$

Координаты всех точек пересечения прямых между собой и с горизонтальными осями являются рациональными числами.

Существует также способ построения такой структуры итеративно. Для этого принимаем размер холста равным 1 x 1, с координатой левого нижнего угла (0,0) и правого верхнего (1,1). Для построения структуры итеративно применяем следующие шаги:

1) рисуем линию с координатами начала (0,0) и конца (1,1);
2) сжимаем содержимое холста до 50% по горизонтали;
3) отражаем содержимое холста относительно вертикальной прямой с координатой x = 0.5 и комбинируем с прошлым изображением.

Иллюстрация метода приведена на рисунках 4-10:

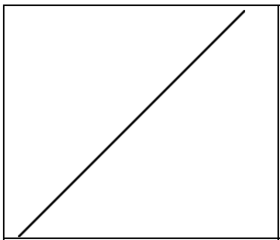

Рис. 4. Шаг 1, итерация 1

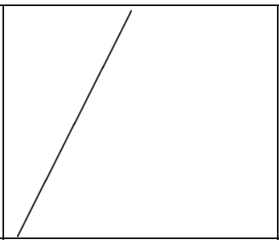

Рис. 5. Шаг 2, итерация 1

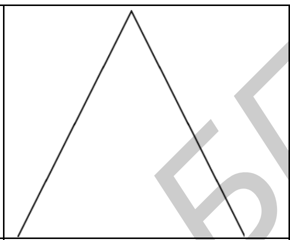

Рис. 6. Шаг 3, итерация 1

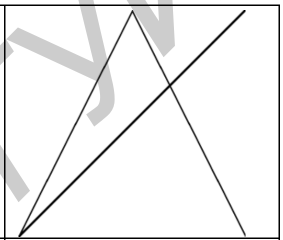

Рис. 7. Шаг 1, итерация 2

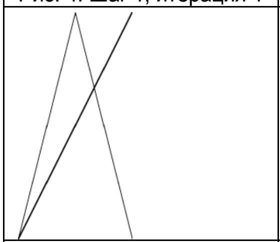

Рис. 8. Шаг 2, итерация 2

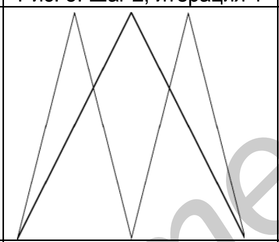

Рис. 9. Шаг 3, итерация 2

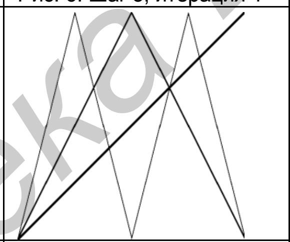

Рис. 10. Шаг 1, итерация 3

Метод с использованием спектрограмм позволяет за конечное время построить изображение с бесконечным количеством итераций, видимость результата которых зависит только от точности арифметики и выбранной оконной функции. При построениях спектрограмм автор использовал арифметику двойной точности и оконную функцию Чебышева с уровнем боковых лепестков в 100 дБ.

Список использованных источников:

1. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 стр.