УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Сафонов А. А.

Ганжа В. А. – канд. физ.-мат наук, доцент

В современном мире описание многих процессов сводится к решению дифференциальных уравнений. Достаточно широко они применяются и в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени. Решение данных задач лишь в некоторых случаях возможно аналитическими методами. Наряду с аналитическими методами используются различные численные методы, одним из которых является метод конечных разностей. Суть метода в том, что решение сводится к решению системы линейных уравнений.

В общем случае волновое уравнение записывается в виде

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

где Δ — оператор Лапласа, $u = u(x,t)$ — неизвестная функция, $t \in R$ — время, $x \in R^n$ — пространственная переменная, u — фазовая скорость.

В одномерном случае уравнение называется также уравнением колебания струны и записывается в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \Delta u + f$$

Дифференциальный оператор $L(u)$, определенный на функциях u, заданных в области $D \subset R^n$, аппроксимируется на некотором классе функций $u \in U$ конечно-разностным оператором $R_h(u_h)$, определенным на функциях u_h, заданных на сетке, зависящей от шага h, если

$$||L(u) - R_h(u_h)|| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \ (\forall u \in U)$$

Аппроксимация имеет порядок k, если

$$\|L(u) - R_h(u_h)\| \le h^k M, h \to 0 \ (\forall u \in U)$$

где M — константа, зависящая от конкретной функции $u \in U$, но не зависящая от шага h. Норма, использованная выше, может быть различной, и понятие аппроксимации зависит от ее выбора.

Условия аппроксимации недостаточно для того, чтобы результат разностной схемы приближался к точному ответу. Исходя из теоремы Филиппова-Рябенького, условие устойчивости требует, чтобы собственные числа (в общем случае и комплексные) этого оператора не превосходили по модулю $1+ch$, где c — некоторая константа, при $h \to 0$. Если это условие не выполнено, то погрешности схемы быстро возрастают и результат тем хуже, чем меньше шаг. Сделаем подстановку

$$U(x,t) = \lambda x e^{it\omega}$$

Подставляя в разностное уравнение получаем

$$\frac{\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}}{p^2} - \vartheta^2 \frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{h^2} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\left(1 - \frac{2p^2\vartheta^2}{h^2} sin^2\frac{\omega}{2}\right)\lambda + 1 = 0$$

$$D(\omega) = \frac{4p^2\vartheta^2}{h^2\left(\frac{p^2\vartheta^2}{h^2} sin^2\frac{\omega}{2} - 1\right) sin^2\frac{\omega}{2}}$$

Если $D<0$ то корни комплексно-сопряженные и равны 1 по модулю. Произведение корней равно 1 исходя из теоремы Виета.

Исходя из теорема Филиппова-Рябенького $|\lambda| \le 1$

Разностная схема устойчива если h и p выбраны так, что

$$\frac{p^2\vartheta^2}{h^2} \le 1$$

Таким образом проанализированы условия сходимости и устойчивости решения волнового уравнения методом конечных разностей.

Список используемых источников:

1. Спектральный признак Неймана устойчивости разностной схемы задачи Коши - А.Ф.Цахоева