УДК 621.391.25

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ТИПА ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Л.И. МАЙСЕНЯ

Институт информационных технологий БГУИР
ул. Козлова, 28, Минск,220037, Республика Беларусь
maisenia@tut.by

Актуализируется использование в цифровой обработке сигналов биортогональных рядов, построенных на основе теоретико-числовых мультипликативных функций.

Ключевые слова: коррелированный сигнал, цифровая обработка, биортогональный ряд, числовые функции Мёбиуса и Дирихле.

В задачах фильтрации сигналов в условиях воздействия шумов естественного и искусственного происхождения, эффективного кодирования и мультиспектральной обработки изображений и в иных современных приложениях используется цифровая спектральная обработка в базисе функций ДПФ, дискретных косинусных функций, функций Хартли, Уолша – Адамара, Хотеллинга и др. В 80–90-х годах прошлого столетия в этой области ЦОС проводились значительные исследования применения теоретико-числового базиса преобразований. Использование алгоритмов быстрых теоретико-числовых преобразований позволяет эффективно решать многие задачи спектрального анализа, быстрой корреляционной обработки кодированных сигналов, изображений. В том числе, в режиме реального времени.

В данной работе впервые актуализируется возможность применения в инфокоммуникационных системах алгоритмов ЦОС, основанных на биортогональных рядах типа Чебышева – Маркова, которые строятся с использованием теоретико-числовых мультипликативных функций Мёбиуса и характеров Дирихле. Данный метод может привести к сокращению избыточности обрабатываемых данных и к их восстановлению с меньшими ошибками после обратного преобразования. Обратимся к математической характеристике метода.

Пусть известны значения непрерывного сигнала $f(t)$ в точках $\left(\frac{n}{8k}\right)$, где $n = 1, 2, ..., 8k,\ k \in \mathbf{N}$. Вводятся функционалы

$$I_k(f) = \frac{\sqrt{2}}{4k}\sum_{n=1}^{8k}\chi_1(n) f\left(\frac{n}{8k}\right),\ \ \bar{I}_k(f) = \frac{\sqrt{2}}{4ik}\sum_{n=1}^{8k}\chi_2(n) f\left(\frac{n}{8k}\right),$$

где $\chi_1(n),\ \chi_2(n)$ – четный и нечетный характеры Дирихле по модулю 8:

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ (-1)^{\left[\frac{n+1}{4}\right]}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \end{cases} \qquad \chi_2(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases}$$

($\left[\frac{n+1}{4}\right]$ и $\left[\frac{n}{4}\right]$ означают целую часть чисел $\frac{n+1}{4}$ и $\frac{n}{4}$). Рассматриваются базисные функции

Библиотека БГУИР

$$g_k(t) = \sum_{d \backslash k} \mu(d)\chi_1(d) \cos 2\frac{k}{d}\pi t,$$
$$h_k(t) = \sum_{d \backslash k} \mu(d)\chi_2(d) \sin 2\frac{k}{d}\pi t, \qquad (1)$$

где суммирование в (1) происходит по всем делителям d числа k, $\mu(d)$ – функция Мёбиуса:

$$\mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 1, \\ 0, & \text{если } n^2 \backslash d,\, n \in \mathbf{N},\, n \neq 1, \\ (-1)^{\alpha}, & \text{если } d = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{\alpha}\ (p_1, p_2, \ldots, p_{\alpha} - \text{простые числа}). \end{cases}$$

Для обработки достаточно гладкой функции $f(t)$ – коррелированного сигнала (изображения) – может быть использовано преобразование

$$f(t) = I_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_k(f) g_k(t) + \bar{I}_k(f) h_k(t) \right), \qquad (2)$$

где $I_0(f) = \int_0^1 f(t)dt.$

Базисные функции разложения (2) g_k и h_k содержат:
– не более 2-х слагаемых для $k < 15$;
– не более 4-х слагаемых для $k < 105$;
– не более 8-ми слагаемых для для $k < 1155$;
– не более 16-ти слагаемых для $k < 15015$.
Вид первых четырех базисных функций:

$$g_1 = \cos 2\pi t, h_1 = \sin 2\pi t;\ \ g_2 = \cos 4\pi t, h_2 = \sin 4\pi t;$$
$$g_3 = \cos 6\pi t + \cos 2\pi t, h_3 = \sin 6\pi t - \sin 4\pi t;\ \ g_4 = \cos 8\pi t, h_4 = \sin 8\pi t.$$

В случае использования биортогональных рядов типа Чебышева – Маркова (2) для обработки сигналов можно ожидать более эффективного хранения и обработки полученных данных.

Аппроксимативные свойства разложения (2) и его обобщений представлены в работах [1], [2].

Список литературы

1. *Шлома, Л.И.* Гармонические составляющие функции и суммы Римана / Л.И. Шлома // Докл. АН БССР. – 1987. – Т. 31, № 1. – С. 13–16.

2. *Шлома, Л.И.* О дискретизации разложений по тригонометрической системе / Л.И. Шлома // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1989. – № 2. – С. 34–40.

Библиотека БГУИР