

УДК 612.391

## АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ БИНАРНОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЛИФТИНГ-СХЕМЫ

Л.А. РУИС, А.А. БОРИСКЕВИЧ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 11 октября 2012

Предложен алгоритм вычисления бинарного дискретного вейвлет-преобразования на основе лифтинг-схемы, обеспечивающего низкую вычислительную сложность, низкий объем бинарных промежуточных данных, отсутствие эффектов и ошибок квантования, а также отсутствие изменения исходного динамического диапазона изображений в вейвлет-области. Алгоритм обеспечивает увеличение концентрации энергии в минимальном количестве вейвлет-коэффициентов изображения по критерию оценки спектра собственных значений преобразованной корреляционной матрицы последовательности Маркова первого порядка.

*Ключевые слова:* бинарное вейвлет-преобразование, спектр собственных значений, лифтинг-схема.

### Введение

В современных системах предварительной обработки и постобработки, сжатия, анализа и защиты изображений широко используется дискретное вейвлет-преобразование (ДВП), обладающее низкой вычислительной сложностью, свойством компактности энергии, возможностью выбора базисных вейвлет-функций с различной пространственно-частотной локализацией, гладкостью и симметрией.

Стандартная реализация ДВП основана на банке КИХ-фильтров, что требует большого количества вычислительных операций и существенно увеличивает используемый объем памяти. В последнее время предложено новое математическое определение вейвлет-преобразования, основанное на пространственно-частотных свойствах вейвлет-функций и гибкой схеме факторизации банка фильтров. Данный подход получил название лифтинг-схемы (ЛС) или лифтинг вейвлет-преобразования (ЛВП) [1]. Вейвлет-преобразование применяется для многих приложений, включая обнаружение края [2], [3], сжатие и кодирования изображений [4], [5], фильтрации сигналов [6], [7], стохастические процессы, фрактальные модели [8-10], частотно-временной анализ [11], [12], радар [13], [14] и др.

Препятствием для улучшения характеристик эффективности лифтинг-схем является использование традиционным ДВП небинарных банков фильтров.

В связи с этим целью работы является разработка алгоритма вычисления бинарного дискретного вейвлет-преобразования на основе лифтинг-схемы, обеспечивающего низкую вычислительную сложность, низкий объем бинарных промежуточных данных, отсутствие эффектов и ошибок квантования, а также отсутствие изменения исходного динамического диапазона изображений в вейвлет-области.

### Бинарное дискретное вейвлет-преобразования

Поле – это любая арифметическая система, в которой можно складывать, вычитать, умножать и делить в соответствии с обычными свойствами ассоциативности, дистрибутивности и коммутативности. Конечное поле (Галуа) обозначается  $GF(p)$ , где  $p$  – порядок поля.

Если  $p$  является простым числом, то  $GF(p)$  можно представить в виде множества элементов  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  с операциями сложения и умножения по модулю  $p$ . Допустим, что вейвлет-декомпозицией является конечное поле с учетом параметров обрабатываемого сигнала (например, изображения). Тогда возможно осуществить бинарное дискретное вейвлет-преобразование (БДВП), в котором арифметика выполняется полностью в  $GF(2)$ , т.е. в поле с бинарными элементами  $\{0, 1\}$  и арифметическими операциями по модулю-2.

БДВП имеет те же свойства, что и традиционное дискретное вейвлет-преобразование (дискретное лифтинг ВП – ДЛВП), но, кроме того, обладает следующими преимуществами:

- низкая вычислительная сложность, так как используется арифметика по модулю-2 и операции сдвига;
- промежуточные и конечные данные являются бинарными;
- не вносит никаких эффектов и ошибок квантования, что всегда гарантирует полную обратимость;
- не изменяет в вейвлет-области исходный динамический диапазон изображений.

Для обеспечения обратимости вейвлет-преобразований с требуемыми многомасштабными свойствами процесс реализации схемы банка фильтров БДВП должен основываться на учете трех основных ограничений на параметрах бинарных фильтров [15]: ширине полосы пропускания, совершенном восстановлении и количестве нулевых моментов.

Аналогично традиционному ДВП на основе банка фильтров БДВП осуществляется бинарными фильтрами посредством круговой бинарной свертки и операции прореживания. Матрица прямого преобразования ( $TM$ ) БДВП имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 TM &= \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}_{N \times N}, \\
 H &= \left[ \bar{C}|_{s=0}, \bar{C}|_{s=2}, \dots, \bar{C}|_{s=N-2} \right]^T, \\
 G &= \left[ \bar{D}|_{s=0}, \bar{D}|_{s=2}, \dots, \bar{D}|_{s=N-2} \right]^T, \\
 \bar{C} &= \{c_0, c_1, \dots, c_{N-2}, c_{N-1}\}, \\
 \bar{D} &= \{d_0, d_1, \dots, d_{N-2}, d_{N-1}\},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\bar{A}|_{s=k}$  – вектор с элементами, сформированными с помощью операции их кругового  $k$ -го сдвига вправо при условии, что  $k = 2n$  и  $n = \overline{0, \frac{N}{2} - 1}$ ;  $G$  и  $H$  – подматрицы для преобразования бинарного поля фильтра (ПБПФ) [15];  $T$  – символ транспонирования;  $\bar{C}$  и  $\bar{D}$  – аппроксимационный и детализирующий бинарные фильтры с весовыми коэффициентами  $c_i$  и  $d_i$  без учета сдвига, соответственно;  $i = \overline{0, N-1}$ .

Таким образом, БДВП на основе банка фильтров осуществляется умножением матрицы  $TM$  на последовательность входных данных  $x$ , что приводит к их одновременной фильтрации и прореживанию:

$$y = TM x, \tag{2}$$

где  $x$  – исходный сигнал и  $y$  – вейвлет-спектр.

Ограничение ширины полосы пропускания удовлетворяется, если обеспечивается приблизительно равное количество ненулевых столбцов в подматрицах ПБПФ, и одинаковые длины  $\bar{D}$  и  $\bar{C}$  фильтров. В случае соблюдения данных ограничений последний столбец подматрицы  $G$  для высокочастотного фильтра  $\bar{D}$  имеет вид

$$G(\overline{0, N-1}; N-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Выполнение данного ограничения поддерживает равномерным распределение контента выходной последовательности высоко- и низкочастотного фильтров, что позволяет проводить многомасштабное разложение входных данных без потери информации при их прореживании.

Для обеспечения относительной степени гладкости в пространственной вейвлет-области с целью компактного представления медленно меняющихся данных сигнала необходимо, чтобы вейвлет-фильтр имел соответствующее количество нулевых моментов  $N_{vm}$ , которое пропорционально количеству последовательных нулей в подматрицах ПБПФ. Оно задается коэффициентом кругового сдвига  $k$ :  $N_{vm} \approx k$ .

Реализация совершенного восстановления схемой банка фильтров требует наличия свойства обратимости у матрицы преобразования  $TM$  размером  $N \times N$ . Оно обеспечивается тогда и только тогда, когда ее детерминант равен единице  $\det(TM) = 1$  с учетом того, что единственный ненулевой элемент в  $GF(2)$  равен единице [16].

Для упрощения вычисления детерминанта матрицы преобразования можно представить в форме верхней матрицы Хессенберга (ВМХ) [15], которая характеризуется тем, что ее подматрицы размером  $N/2 \times N/2$ , находящие вдоль главной диагонали, являются одинаковыми:

$$TM = \begin{bmatrix} \sum_{i=2n}^{N-2} c_i & \sum_{i=2n+1}^{N-1} c_i \\ \sum_{i=2n}^{N-2} d_i & \sum_{i=2n+1}^{N-1} d_i \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В этом случае детерминант ВМХ определяется с помощью соотношения

$$\det(TM) = \sum_{i=2n}^{N-2} c_i \sum_{i=2n+1}^{N-1} d_i + \sum_{i=2n+1}^{N-1} c_i \sum_{i=2n}^{N-2} d_i = 1$$

$$\text{при } \sum_{i=2n}^{N-2} c_i = 0, \sum_{i=2n+1}^{N-1} c_i = 1, \sum_{i=2n}^{N-2} d_i = 1, \sum_{i=2n+1}^{N-1} d_i = 1.$$

Для гарантии обратимости БДВП требуется, чтобы выполнялось равенство

$$d_{2i+1} = d_{2i} \quad (5)$$

при  $0 \leq n < N/2$ .

Возможность использования данного подхода обусловлена тем фактом, что  $a^p = a$  для любого  $a \in GF(2)$  при целом числе  $p \geq 1$ , т.е. умножение  $N/2$ -х одинаковых элементов равно исходному элементу в  $GF(2)$ .

Обратное БДВП имеет вид

$$x = UM \text{ у}. \quad (6)$$

Аналогично матрице прямого преобразования, матрица обратного преобразования  $UM$  определяется выражением

$$\begin{aligned} UM &= [S \ R]_{N \times N}, \\ S &= [\bar{S}|_{s=0}, \bar{S}|_{s=2}, \dots, \bar{S}|_{s=N-2}], \\ R &= [\bar{R}|_{s=0}, \bar{R}|_{s=2}, \dots, \bar{R}|_{s=N-2}], \\ \bar{R} &= \{r_0, r_1, \dots, r_{N-2}, r_{N-1}\}^T, \\ \bar{S} &= \{s_0, s_1, \dots, s_{N-2}, s_{N-1}\}^T, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $R$  и  $S$  – подматрицы для обратных ПБПФ;  $\bar{R}$  и  $\bar{S}$  – аппроксимационные и детализирующие обратные фильтры без учета сдвига с весовыми коэффициентами  $r_i$  и  $s_i$  соответственно;  $i = \overline{0, N-1}$ .

### Условия независимости БДВП от длительности сигнала

Рассмотренные ограничения гарантируют обратимость БДВП, но не обеспечивают свойство ортогональности и биортогональности БДВП. Это обусловлено тем, что изменения длины сигнала, как и в процессе увеличения разрешения (восстановления), приводят к изменению длины обратных бинарных фильтров. Согласно (5), энергия высоко-  $E_D$  и низкочастотного  $E_C$  фильтров подчиняется соотношениям

$$E_C = \sum_{i=0}^{N-1} c_i = 1 \text{ и } E_D = \sum_{i=0}^{N-1} d_i = 0. \quad (8)$$

В отличие от традиционного ДВП вектор, принадлежащий  $GF(2)$ , может иметь нулевую энергию даже тогда, когда вектор не является нулевым вектором. Поскольку энергия высокочастотного фильтра равна нулю, то БДВП не может быть ортогональным или биортогональным, хотя оно обратимо. Отсутствие ортогональности и биортогональности требует усложнения реализации обратных бинарных фильтров.

Для того, чтобы обратные бинарные фильтры не зависели от длительности сигнала, используется дополнительное ограничение перпендикулярности [17], которое определяется посредством следующих условий:

$$\bar{C} \cdot \bar{R}|_{s=j} = \delta_j, \bar{C} \cdot \bar{S}|_{s=j} = 0, \bar{D} \cdot \bar{R}|_{s=j} = 0, \bar{D} \cdot \bar{S}|_{s=j} = \delta_j \quad (9)$$

где  $\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j=0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ ;  $A \cdot B$  – векторное скалярное произведение векторов  $A$  и  $B$ ;  $j = 2n$  при

$n = \overline{0, \frac{N}{2} - 1}$ . Данное условие (9) должно выполняться для всех сигналов, имеющих длину больше или равной длине фильтров. Если выполняются условия (5), (8) и (9), то система уравнений для определения  $r$  и  $s$  при длине прямых бинарных фильтров  $N=8$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ c_6 & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & 0 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 \\ d_6 & d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 & s_0 \\ r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \\ r_3 & s_3 \\ r_4 & s_4 \\ r_5 & s_5 \\ r_6 & s_6 \\ r_7 & s_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Из (10) видно, что решение данной системы уравнений зависит от весовых коэффициентов выбранных прямых бинарных фильтров  $d$  и  $s$ , что приводит к четырем группам пар бинарных фильтров, которые согласованы с ограничениями вычисления БДВП (см. табл. 1).

Таблица 1. Группы пар бинарных фильтров длиной  $N=8$

Группа	Тип фильтра	Выбранные прямые бинарные фильтры	Колич. возможных реализаций обратных фильтров
1	НЧ ВЧ	$\{0,1,0,0,0,0,0,0\}$ $\{1,1,0,0,0,0,0,0\}$	4
2	НЧ ВЧ	$\{1,1,1,0,0,0,0,0\}$ $\{1,1,0,0,0,0,0,0\}$	12
3	НЧ ВЧ	$\{1,1,1,1,0,0,0,1\}$ $\{1,1,0,0,0,0,0,0\}$	12
4	НЧ ВЧ	$\{1,1,1,1,1,1,1,0\}$ $\{1,1,0,0,0,0,0,0\}$	4

### Лифтинг-схема бинарного ДВП

БДВП, как и традиционное ДВП, на основе банка фильтров имеет ряд недостатков: высокая вычислительная сложность и большой объем промежуточных коэффициентов при процессе фильтрации и прореживании. Для устранения данных недостатков была предложена лифтинг-схема для дискретного вейвлет-преобразования [1]. Переход от БДВП на основе банка фильтров к лифтинг-схеме БДВП основан на подходе, представленном в [18].

Аппроксимационный фильтр  $\bar{C}$  можно представить в виде полиномов Лаурента в  $Z$ -области следующим образом:

$$\bar{C}(z) = \sum_{q=k_b}^{k_e} c_q z^q,$$

где  $k_b$  и  $k_e$  – наименьшее и наибольшее целые числа, соответственно, при которых  $c_q \in GF(2)$  является ненулем, а степень полинома определяется  $\deg|\bar{C}| = k_e - k_b$ , причем  $\deg|\bar{C}| = 0$  когда  $\bar{C}$  является мономом.

В полифазном представлении фильтр  $\bar{C}$  можно представить в виде

$$\bar{C}(z) = c_e(z^2) + z^{-1}c_o(z^2), \quad (11)$$

где  $c_e$  и  $c_o$  – четные и нечетные отсчеты импульсной характеристики фильтра, соответственно.

Аналогично в полифазном виде можно представить и остальные фильтры и исходный сигнал:

$$\begin{aligned} \bar{D}(z) &= d_e(z^2) + z^{-1}d_o(z^2), \\ \bar{R}(z) &= r_e(z^2) + z^{-1}r_o(z^2), \\ \bar{S}(z) &= s_e(z^2) + z^{-1}s_o(z^2), \end{aligned} \quad (12)$$

$$X(z) = X_e(z^2) + z^{-1}X_o(z^2),$$

где  $X_e$  и  $X_o$  – четные и нечетные отсчеты исходного сигнала соответственно.

С учетом (11) и (12) определяются прямая  $PM$  и обратная  $BM$  полифазные матрицы:

$$PM(z) = \begin{bmatrix} c_e(z) & c_o(z) \\ d_e(z) & d_o(z) \end{bmatrix} \text{ и } BM(z) = \begin{bmatrix} r_e(z) & r_o(z) \\ s_e(z) & s_o(z) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Следовательно, БДВП можно представить в виде произведения полифазных матриц:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_e(z) \\ Y_o(z) \end{bmatrix} &= PM(z^{-1}) \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_e(z) & z^{-1}c_o(z) \\ d_e(z) & z^{-1}d_o(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix} &= BM(z) \begin{bmatrix} Y_e(z) \\ Y_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_e(z) & r_o(z) \\ s_e(z) & s_o(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_e(z) \\ Y_o(z) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

В матричной форме (13) условие совершенного восстановления будет выглядеть следующим образом:

$$PM(z^{-1})BM(z) = I_{2 \times 2},$$

где  $I$  – единичная матрица размером  $2 \times 2$ .

Если детерминант  $PM$  не является мономом, т.е.  $\det(PM) \neq z^l$  при некоторых  $l$  целых числах, то его обратная величина приведет к неопределенности решений. Таким образом, предполагается, что детерминант  $PM$  всегда может быть определен в виде  $\det(PM) = z^l$ .

Не нарушая общности, можно считать, что детерминант  $\det(PM) = z^l = 1$ . В противном случае полиномы всегда можно разделить на их детерминанты, что эквивалентно сдвигу коэффициентов соответствующих бинарных фильтров в пространственной области. В связи с этим, пара фильтров синтеза  $(\bar{C}, \bar{D})$  и пара фильтров анализа  $(\bar{R}, \bar{S})$  являются комплементарными, и полифазные матрицы могут быть изменены следующим образом

$$PP(z) = \begin{bmatrix} m_e(z) & m_o(z) \\ n_e(z) & n_o(z) \end{bmatrix}.$$

Согласно (14) и с учетом зависимости между степенями полиномов  $m_e(z)$ ,  $m_o(z)$ ,  $n_e(z)$  и  $n_o(z)$ , можно определить две различные структуры факторизации  $PP(z)$  с помощью алгоритма Евклида на основе произведения конечного числа треугольных матриц.

**Факторизация №1.** Если  $\deg|m_e(z)| \geq \deg|n_e(z)| \geq 0$  и  $\deg|m_o(z)| \geq \deg|n_o(z)| \geq 0$ , то существуют полиномы Лаурента  $f_1(z)$ ,  $m_e^{new}(z)$  и  $m_o^{new}(z)$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$0 \leq \deg|m_e^{new}(z)| \leq \deg|n_e(z)|,$$

$$0 \leq \deg|m_o^{new}(z)| \leq \deg|n_o(z)|,$$

$$m_e(z) = m_e^{new}(z) + f_1(z)n_e(z),$$

$$m_o(z) = m_o^{new}(z) + f_1(z)n_o(z).$$

Это обуславливает снижение степеней  $m_e(z)$  и  $m_o(z)$  так, что они становятся меньше или равны  $n_e(z)$  и  $n_o(z)$  соответственно. В этом случае полифазную матрицу можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} m_e(z) & m_o(z) \\ n_e(z) & n_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_e^{new}(z) & m_o^{new}(z) \\ n_e(z) & n_o(z) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

**Факторизация №2.** Если  $\deg|n_e(z)| \geq \deg|m_e(z)| \geq 0$  и  $\deg|n_o(z)| \geq \deg|m_o(z)| \geq 0$ , то существуют полиномы Лаурента  $t_1(z)$ ,  $m_e^{new}(z)$  и  $m_o^{new}(z)$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$0 \leq \deg |n_e^{new}(z)| \leq \deg |m_e(z)|,$$

$$0 \leq \deg |n_o^{new}(z)| \leq \deg |m_o(z)|,$$

$$n_e(z) = n_e^{new}(z) + t_1(z)m_e(z),$$

$$n_o(z) = n_o^{new}(z) + t_1(z)m_o(z).$$

Это аналогично обуславливает снижение степеней  $n_e(z)$  и  $n_o(z)$  так, что они становятся меньше или равны  $m_e(z)$  и  $m_o(z)$ , соответственно. В этом случае полифазную матрицу можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} m_e(z) & m_o(z) \\ n_e(z) & n_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_1(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_e(z) & m_o(z) \\ n_e^{new}(z) & n_o^{new}(z) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Комбинируя выражения (15) и (16), полифазная матрица всегда может быть разложена в виде произведения треугольных матриц двух типов следующим образом

$$PP(z) = \begin{bmatrix} m_e(z) & m_o(z) \\ n_e(z) & n_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & f_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Отметим, что факторизация в (17) отличается от лифтинг-схемы в традиционном ДВП. Это связано с тем, что имеется только два элемента в бинарном поле  $GF(2)$ . В результате, есть только один способ факторизации элемента 1, т.е.  $1 = 1 \times 1$ , в отличие от случая реального поля, где имеются бесконечные способы факторизации, т.е.  $1 = K \times K^{-1}$ .

Бинарное дискретное лифтинг вейвлет-преобразование БДЛВП применяется на бинарных изображениях, поэтому для его применения на полутоновых изображениях необходима предварительная декомпозиция на 8 битовых плоскостей (см. рис. 2). БДЛВП сначала осуществляется на каждом бинарном изображении, а потом объединяются все вейвлет-матрицы битовых плоскостей (рис. 1).

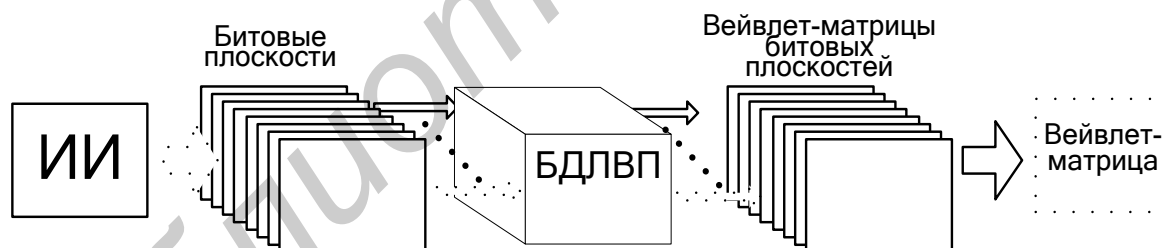


Рис. 1. Блок-схема БДЛВП

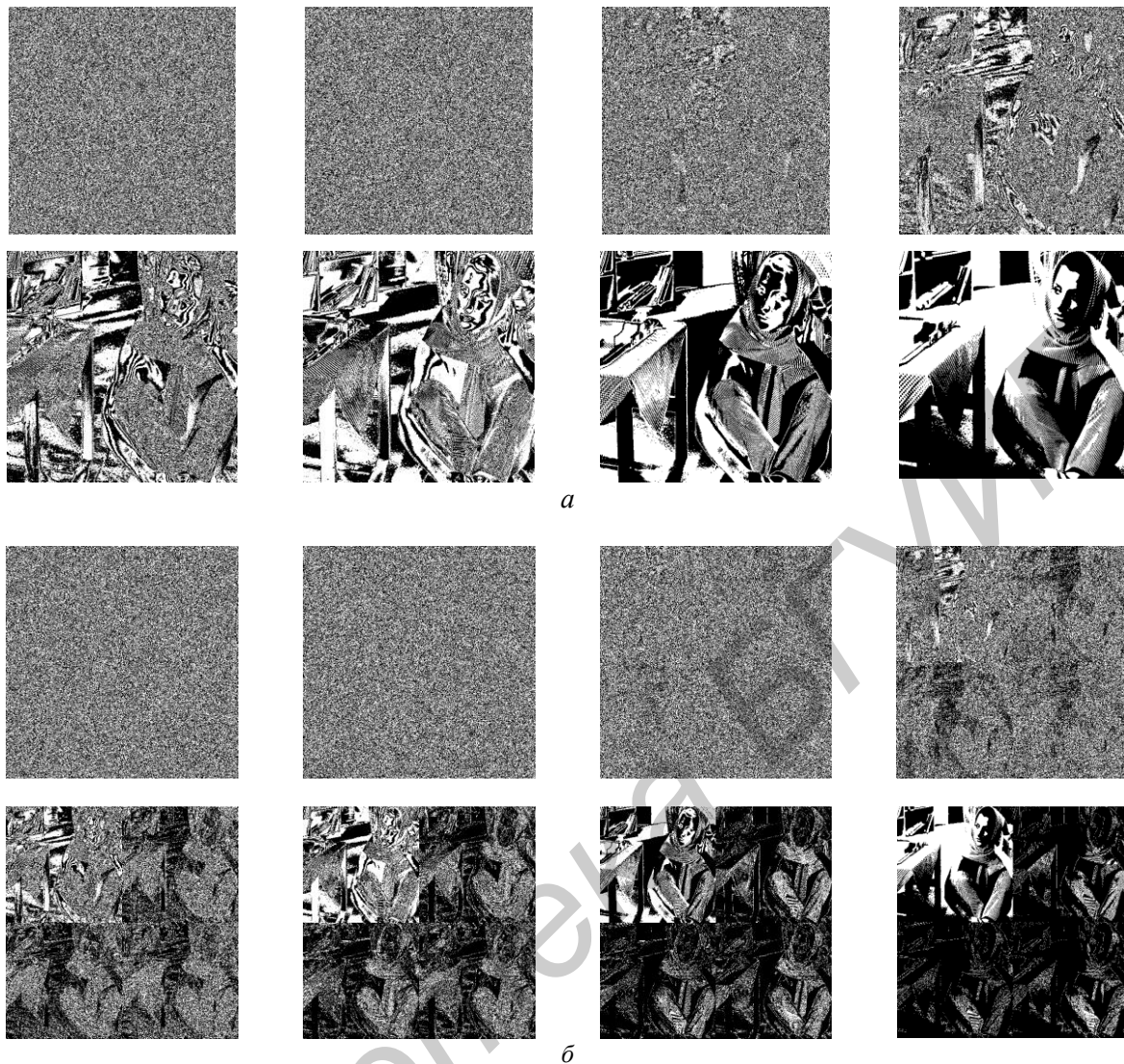


Рис. 2. Декомпозиция исходного изображения на 8 битовых плоскостей в пространственной (а) и вейвлет области (б)

### Результаты моделирования

Для оценки эффективности предложенного алгоритма использованы вейвлет-функции Хаар, 5/3, 7/5, 9/7 без адаптации и АЛВПК [19], АЛВПГ (алгоритм вычисления адаптивного обобщенного лифтинг вейвлет-преобразования без дополнительной информации) с адаптацией, и корреляционная матрица размером  $16 \times 16$  последовательности Маркова первого порядка с коэффициентом корреляции  $\rho = 0,95$ .

Любой случайный дискретный сигнал  $x(n)$  можно представить в виде последовательности Маркова  $p$ -го порядка, если условная вероятность текущего отчета  $P(x(n))$  удовлетворяет следующему соотношению [20], т.е.

$$P(x(n)|x(n-1), x(n-2), \dots) = P(x(n)|x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-p)).$$

Корреляционная матрица  $R$  последовательности Маркова первого порядка с коэффициентом корреляции  $\rho$  [20] имеет вид



$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \rho^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \rho \\ \rho^{N-1} & \dots & \dots & \dots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Спектр собственных значений является одним из основных средств для оценки эффективности алгоритмов сжатия изображений. Для определения спектра собственных значений сначала осуществляется БДЛВП корреляционной матрицы последовательности Маркова первого порядка, а потом вычисляются собственные значения вейвлет-коэффициентов  $W$ :

$$W = \text{БДЛВП}\{R\}$$

$$\lambda = \text{diag}\{EigenValue(W)\}$$

Сравнительный анализ эффективности предложенного алгоритма по критерию компактности энергии вейвлет-функций представлен в табл. 2, используя два наибольших собственных значения спектра вейвлет-коэффициентов.

Таблица 2. Оценка спектра собственных значений вейвлет-коэффициентов для вейвлет-функций с и без адаптации

Уровень	Хаар	5/3	7/5	9/7	Бинарная	АЛВПК	АЛВПГ1D
1	1,0017	0,9961	9,1252	12,4724	1,7912	0,9667	6,2446
	6,2233	6,2318	1,4515	1,9117	6,5125	6,2209	0,9927
2	0,5864	0,5529	6,7496	12,6072	1,4409	0,4885	3,1638
	3,1257	3,1503	1,1463	1,7753	4,1742	3,1116	0,5320
3	0,5119	0,4077	5,1904	13,1280	1,3001	0,2372	1,6858
	1,5982	1,6748	0,9817	1,5090	3,3296	1,5599	0,4254
4	0,6025	0,7708	3,8211	13,1084	1,2914	0,1725	1,1989
	0,8566	0,8763	1,3954	1,7282	3,1564	0,7894	0,6516

Из табл. 2 видно, что эффективность использования вейвлет-функций БДЛВП по критерию компактности энергии на основе спектра собственных значений преобразованной корреляционной матрицы последовательности Маркова первого порядка превосходит вейвлет-функции Хаара и 5/3 без адаптации, АЛВПК и АЛВПГ приблизительно в 3 раза для четырех и выше уровней вейвлет-разложения. Однако не превосходит вейвлет-функции 7/5 и 9/7 без адаптации. Основными преимуществами БДЛВП является то, что оно не изменяет исходный динамический диапазон изображений в вейвлет-области и имеет положительные вейвлет-коэффициенты.

### Заключение

Предложен алгоритм вычисления БДЛВП, основного для построения аппроксимационных и детализирующих бинарных фильтров, удовлетворяющих четыре основных ограничения на параметрах бинарных фильтров: ширину полосы пропускания, совершенное восстановление, количество нулевых моментов и перпендикулярность, которые гарантируют обратимости вейвлет-преобразований с требуемыми многомасштабными свойствами.

Данный алгоритм обеспечивает низкую вычислительную сложность, низкий объем бинарных промежуточных данных, отсутствие эффектов и ошибок квантования, а также отсутствие изменения в вейвлет-области исходного динамического диапазона изображений.

Из результатов моделирования следует, что предложенное БДЛВП обеспечивает увеличение концентрации энергии в минимальном количестве вейвлет-коэффициентов изображе-

ния по критерию оценки спектра собственных значений преобразованной корреляционной матрицы последовательности Маркова первого порядка, и по данному критерию превосходит в 3 раза некоторые стандартные и адаптивные вейвлет-функции.

## AN ALGORITHM OF BINARY WAVELET TRANSFORM COMPUTATION BASED ON LIFTING SCHEME

L.A. RUIZ, A.A. BORISKEVICH

### Abstract

An algorithm binary wavelet transform computation based on lifting-scheme, which provides low computational complexity, low binary intermediate data volume, the absence of quantization errors and dynamic original image range change in the wavelet-domain. Is required, this algorithm increases energy images concentration in a minimal amount of wavelet coefficients on criterion of the eigen value spectrum estimation of the transformed correlation matrix of the Markov sequence of first-order.

### Литература

1. *Sweldens W.* // Proc. of SPIE. 1995. Vol. 2569. P. 68-79.
2. *Mallat S.* // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1992. Vol. 14. P. 710-732.
3. *Parks T.* // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Albuquerque, NM. 1990. P. 2459-2462.
4. *Lewis A.* // IEEE Trans. Image Processing. 1992. Vol. 1. P. 244-250.
5. *Shapiro J.* // IEEE Trans. Signal Processing. 1993. Vol. 41. P. 3445-3462.
6. *Xu Y.* // IEEE Trans. Image Processing. 1994. Vol. 3. P. 747-758.
7. *Donoho D.* // Biometrika. 1994. Vol. 81. P. 425-455.
8. *Wornell G.* // IEEE Trans. Inform Theory. 1992. Vol. 38. P. 785-800.
9. *Freeland G.* // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Albuquerque, NM. 1990. P. 2345-2348.
10. *Moulin P.* // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. Vol. 42. P. 3126-3136.
11. *Rioul O.* // IEEE Signal Processing Mug. 1991. Vol. 8. P. 14-38.
12. *Herley C.* // IEEE Trans. Signal Processing. 1993. Vol. 41. P. 3341-3359.
13. *Tewfik A.* // Optic. Eng. 1994. Vol. 33. P. 2509-2519.
14. *Moulin P.* // IEEE Trans Inform. Theory. 1992. Vol. 38. P. 801-813.
15. *Swanson M.* // IEEE Transaction Image Processing. 1996. Vol. 5. P. 1637-1650.
16. *Vaidyanathan P.* // IEEE Int. Symp. Circuits Syst., New Orleans, LA, 1990. P. 1189-1192.
17. *Law N.* // Elsevier Signal Processing. 2007. Vol.87-11. P. 2850-2858.
18. *Law N.* // IEEE Image Processing, 2001. International Conference on Proceedings. 2001. Vol. 2. P. 281-284.
19. *Руус Л.* // Телекоммуникации: Сети и технологии. БГУИР. 2011. 26-32 с.
20. *Jain A.* // Fundamentals of Digital Image Processing. Prentice Hall Inc.1989.