

УДК 621.391.14

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДОСТАТОЧНОГО ЧИСЛА НОРМ СИНДРОМОВ ДЛЯ ДЕКОДИРОВАНИЯ БЧХ-КОДОВ

З.Н. ХОАНГ, В.К. КОНОПЕЛЬКО, Е.Г. МАКЕЙЧИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 2 октября 2012

Рассматривается формирование образующих векторов, нахождение норм синдромов и идентификационных параметров для образующих векторов ошибок кратностей  $t = 3 \div 7$  БЧХ-кодов с длиной  $n = 127$ . Предлагается идентификация на основе совместного использования основных и дополняющих норм. Показывается, что при значении первой компоненты синдрома равной нулю достаточно использовать только дополняющие нормы.

*Ключевые слова:* синдром  $S$ , норма синдрома  $N$ , основные  $N_o$ , зависимые  $N_z$ , дополняющие  $N_d$  нормы, кратность ошибок  $t$ , длина кода  $n$ , образующие вектора ошибок.

### Введения

Нормы синдромов эффективно используются в обработке БЧХ-кодов для коррекции ошибок кратностей  $t = 1 \div 3$  [1, 2]. Однако их применение для контроля ошибок большой кратности  $t > 3$  не исследовалось из-за сложности анализа, синтеза формирования множества образующих ошибок, поиска идентификационных параметров. Ниже приводятся исследования по изучению норм синдромов в обработке кодов длины  $n = 127$ , исправляющих ошибки кратности  $3 \leq t \leq 7$ , их сравнение с БЧХ-кодами для  $n = 31$ .

### Алгоритм нахождения норм синдромов БЧХ-кодов и идентификаторов, образующих векторов ошибок

Для нахождения норм синдромов и идентификаторов, образующих векторов ошибок, приведен вычислительный эксперимент, который включает следующие этапы: формирование образующих векторов ошибок, вычисление синдромов и их норм, их различия для образующих векторов ошибок и формирование отличающихся множеств норм  $\{N_1, N_2, \dots, N_i, \dots\}$ , обозначающих все образующие вектора ошибок. На рис. 1 приведен алгоритм вычисления норм и идентификаторов, который можно использовать для любых кратностей ошибок  $t$  и длины кодов  $n$ .

При реализации алгоритмов формирования образующих векторов, вычисления синдрома и их норм, а также поиска идентификаторов использовались система с интерпретируемым функциональным языком программирования Mathematica, а программа разрабатывалась в среде операционной системы Window 7 для 4-ядерного процессора Intel Core i7.

Среднее время проведения вычислительных экспериментов в зависимости от кратностей корректируемых ошибок  $t$  и длины кодов  $n$  представлено в табл. 1.

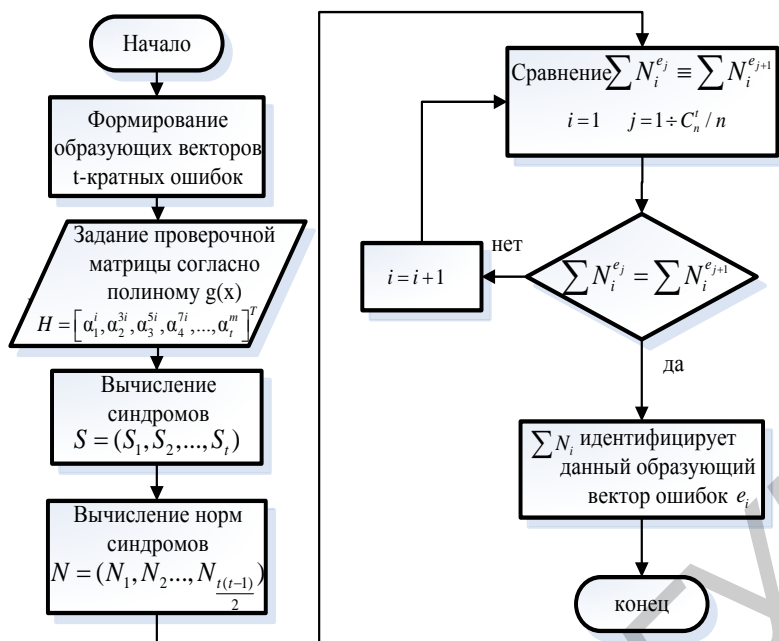


Рис. 1. Алгоритм вычисления норм и нахождения идентификационных параметров образующих векторов ошибок

Таблица 1. Зависимость среднего времени проведения вычислительных экспериментов для поиска идентификационных параметров от кратности  $t$

Кратность ошибок $t$	2	3	4	5	6	7
Длина кода $n$						
31	менее 1 с	менее 1 с	2-3 с	30-35 с	2-3 мин	9-10 мин
127	менее 1 с	18-20 с	8-10 мин	3-4 ч	около 70 ч	более 90 суток

Анализ данных табл. 1 показывает, что с ростом длины кода  $n$  и кратности корректируемых ошибок  $t$ , среднее время проведения вычислительного эксперимента резко возрастает. Например, при кратности ошибок  $t = 6$  для кодов с  $n = 31, 127$  среднее время составляет 2-3 м и около 70 ч соответственно. Причем время, затрачиваемое на формирование образующих векторов ошибок, значительно меньше времени, затрачиваемого на вычисление синдромов, их норм и нахождение идентификаторов образующих векторов ошибок (для формирования образующих векторов шестикратных ошибок для  $n = 127$  требуется только 20-30 м, а для вычисления синдромов, их норм и нахождения идентификаторов уже около 70 ч).

### Идентификационные параметры для БЧХ-кодов длиной 127

В [1, 2] установлено, что число используемых норм зависит от числа образующих векторов ошибок. Как показано в [3] для длины  $n = 31$  все нормы  $N$  можно разбить на две группы: основные  $N_0$  и зависимые  $N_3$ . В общем случае для идентификации образующих векторов ошибок достаточно использовать основные нормы  $N_0$ . Однако поскольку некоторые синдромы  $S_i = 0$ , то для них основные  $N_0$  нормы не вычисляются, а оставшихся недостаточно для идентификации образующих векторов ошибок, что приводит к необходимости использовать зависимые нормы  $N_3$  наряду с основными  $N_0$ . Это приводит при больших  $t$  к числу норм большему, чем число синдромов. В табл. 2-4 приведены результаты вычислительного эксперимента по поиску идентификационных параметров из множеств основных  $N_0$  и зависимых  $N_3$  норм, позволяющих идентифицировать соответствующие образующие вектора ошибок, где дополняющие нормы  $N_d$  выбираются из числа зависимых  $N_3$ .

Таблица 2. Зависимость числа образующих векторов ошибок, основных  $N_0$  и дополняющих  $N_d$  норм достаточных для идентификации образующих векторов ошибок от кратности ошибок при одной компоненте синдрома  $S_i = 0$ ,  $n = 127$

Синдром $S_i$ Кратность $t$	Число образующих векторов ошибок (1)	$S_i = 0$	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$
	Идентификационные параметры (2)			
3	(1)	2562	21	21
	(2)	$N_1, N_2$	$N_3$	$N_2$
4	(1)	78780	644	644
	(2)	$N_1, N_2, N_3$	$N_4, N_5$	$N_2, N_3$
5	(1)	1924825	15155	15155
	(2)	$N_1, N_2, N_3, N_4$	$N_5, N_6, N_7$	$N_2, N_3, N_4$
6	(1)	38835778	305004	305004
	(2)	$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$	$N_6, N_7, N_8, N_9$	$N_2, N_3, N_4, N_5$
Синдром $S_i$ Кратность $t$	Число образующих векторов ошибок (1)	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_6 = 0$
	Идентификационные параметры (2)			
3	(1)			
	(2)			
4	(1)	630		
	(2)	$N_1, N_2$		
5	(1)	15155	151225	
	(2)	$N_1, N_2, N_4$	$N_1, N_2, N_3$	
6	(1)	305067	305032	305053
	(2)	$N_1, N_2, N_4, N_5$	$N_1, N_2, N_3, N_5$	$N_1, N_2, N_3, N_4$

Таблица 3. Зависимость числа образующих векторов ошибок, основных  $N_0$  и дополняющих  $N_d$  норм, достаточных для идентификации образующих векторов ошибок от кратности ошибок  $t$  при двух компонентах синдрома  $S_i = S_j = 0$ ,  $n = 127$

Синдром $S_{i,j} = 0$ Кратность $t$	Число образующих векторов ошибок (1)	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$S_2 = 0$	$S_2 = 0$
	Идентификационные параметры (2)	$S_2 = 0$	$S_3 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_6 = 0$	$S_3 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$
5	(1)			7				7	
	(2)			$N_6$				$N_2$	
6	(1)	2541	2548	2478	2513	2499	2499	2499	2527
	(2)	$N_9, N_{10}$	$N_7, N_8$	$N_6, N_8$	$N_6, N_7$	$N_6, N_7$	$N_3, N_4$	$N_2, N_4$	$N_2, N_3$
Синдром $S_{i,j} = 0$ Кратность $t$	Число образующих векторов ошибок (1)	$S_2 = 0$	$S_3 = 0$	$S_3 = 0$	$S_3 = 0$	$S_4 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	
	Идентификационные параметры (2)	$S_6 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_6 = 0$	$S_5 = 0$	$S_6 = 0$	$S_6 = 0$	
5	(1)		7						
	(2)		$N_1$						
6	(1)	2485	2478	2506	2492	2462	2485	2485	
	(2)	$N_2, N_3$	$N_1, N_4$	$N_1, N_3$	$N_1, N_4$	$N_1, N_2$	$N_1, N_2$	$N_1, N_2$	

Таблица 4. Зависимость числа образующих векторов ошибок, основных  $N_0$  и дополняющих  $N_d$  норм достаточных для идентификации образующих векторов ошибок, от кратности ошибок  $t$  при трех компонентах синдрома  $S_i = S_j = S_z = 0, n=127$

Синдром $S_{i,j,z} = 0$	Число образующих векторов ошибок (1)	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$S_2 = 0$
	Идентификационные параметры (2)	$S_2 = 0$	$S_3 = 0$	$S_4 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_3 = 0$	$S_3 = 0$
Кратность $t$		$S_4 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_6 = 0$	$S_6 = 0$	$S_4 = 0$	$S_6 = 0$
	6	(1)	21	14	21	35	28	21
	(2)	$N_{10}$	$N_7$	$N_6$	$N_6$	$N_6$	$N_4$	$N_3$
Синдром $S_{i,j,z} = 0$	Число образующих векторов ошибок (1)	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$S_2 = 0$	$S_3 = 0$	$S_3 = 0$	$S_3 = 0$	$S_4 = 0$
	Идентификационные параметры (2)	$S_4 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_4 = 0$	$S_4 = 0$	$S_5 = 0$	$S_5 = 0$
Кратность $t$		$S_5 = 0$	$S_6 = 0$	$S_6 = 0$	$S_5 = 0$	$S_6 = 0$	$S_4 = 0$	$S_6 = 0$
	6	(1)	14	14	21	42	14	14
	(2)	$N_2$	$N_2$	$N_2$	$N_1$	$N_1$	$N_1$	$N_1$

Анализ табл. 2-4, показывает, что число используемых норм в два раза меньше числа норм, предложенных в [1, 2]: это приводит к уменьшению в два раза числа входов селектора декодера. На рис. 2 представлена зависимость достаточного числа норм  $N$  для идентификации ошибок кратности  $t$  для БЧХ-кодов длиной  $n = 31, 127$ .

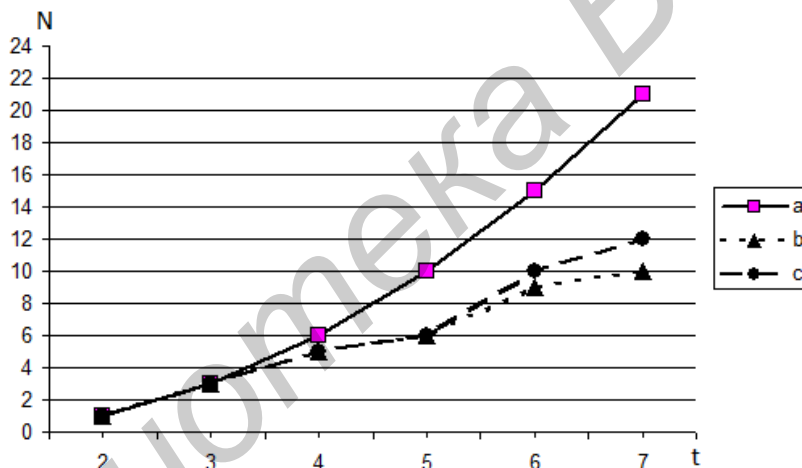


Рис. 2. Зависимость достаточного числа норм  $N$  от кратности ошибок  $t$ :  $a$  – число норм из [1, 2];  $b$  – число норм для  $n = 31$ ;  $c$  – число норм для  $n = 127$

Анализ зависимостей на рис. 2 показывает, что количество идентификационных параметров для БЧХ-кода с  $n = 127$  незначительно больше, чем для БЧХ-кода с  $n = 31$ . Кроме того, видно, что декодирующее устройство для коррекции больших кратностей ошибок  $t$  на большей длине кода  $n$  может быть реализовано. Например, для построения блока идентификатора шестикратных ошибок можно использовать ПЗУ емкостью 647 Мб, в котором хранятся 40703775 образующих векторов ошибок. Блок идентификатора также может быть построен и на ПЛИС, емкость которой должна быть не менее 40703775 элементов «И». Такое количество логических элементов обеспечивает ПЛИС Spartan 3 XC3S4000, у которой имеется 6912 конфигурируемых логических блоков, каждый из которых состоит из 62208 логических элементов.

Анализ данных табл. 2-4 также показывает, что для идентификации ошибок кратностей  $3 \leq t \leq 7$  при  $n = 127$  исключить какую либо подматрицу с  $\alpha^{(2m+1)i}$  в проверочной матрице  $H$  БЧХ-кода нельзя (хотя это имеет место в кодах с  $n = 31$ ). Поэтому параметры БЧХ-кодов, задаваемых проверочной матрицей  $H = [\alpha_1^i, \alpha_2^{3i}, \alpha_3^{5i}, \alpha_4^{7i}, \dots, \alpha_t^m]^T$ , равны (127,106), (127,99), (127,92), (127,106), (127,78) для  $t = 3; 4; 5; 6; 7$  соответственно. Однако, как отмечено в [4], эти коды представляют собой «хорошие коды» с малой избыточностью.

Из данных табл. 2-4 следует, что если отказаться от декодирования образующих векторов ошибок, для которых синдром  $S_1 = 0$  (в этом случае для идентификации ошибок используются только основные нормы  $N_o$ ), то число отказов от декодирования ошибок кратности  $t = 3; 4; 5; 6$  на длине кода  $n = 127$  равно 0,8%, 0,8%, 0,78%, 0,78% соответственно, (это примерно в 4 раза меньше по сравнению при аналогичном отказе от декодирования BCH-кодов с  $n = 31$  [3]). Проведенный эксперимент для кодов длиной  $n = 511$  показал, что число отказов от декодирования уменьшается до 0,2%. Это позволяет уменьшить в более чем два раза число входов у селектора декодирующего устройства при небольшом числе отказов от декодирования при коррекции ошибок кратности  $t = 6$ .

### Заключение

Показано, что среднее время проведения вычислительного эксперимента по формированию образующих векторов ошибок, вычислению синдромов, норм и нахождению идентификаторов резко возрастает с увеличением длин кодов и числа корректируемых ошибок, а число используемых норм для BCH-кодов с различными длинами приблизительно одинаково и в два раза меньше числа норм, предложенных в [1, 2]. Также установлено, что с ростом длин кодов имеется возможность отказаться от декодирования векторов ошибок, для которых синдром  $S_1 = 0$ , поскольку число соответствующих образующих векторов ошибок менее одного процента. Все это приводит к пятикратному уменьшению числа входов блока идентификации при коррекции шестикратных ошибок.

## ANALYSIS OF A SUFFICIENT NUMBER OF NORMS SYNDROMES DECODING BCH-CODES

D.N. HOANG, V.K. KONOPELKO, E.G. MAKEICHNIK

### Abstract

The formation of generating vectors, the calculus of syndrome norms and the identification parameters for generating error vectors of multiplicities  $n = 127$  for BCH-codes with length  $n = 31$  are studied. Identification based on the sharing use of main and complementaries norms in case of null value of the first components of the syndrome is proposed.

### Литература

1. Конопелько В.К., Липницкий В.А. Теория норм синдромов и перестановочное декодирование помехоустойчивых кодов. Минск, 2004.
2. Липницкий В.А., Конопелько В.К. Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения. Минск, 2007.
3. Конопелько В.К., Хоанг Н.З. // Докл. БГУИР. 2012. №8. С. 70-75.
4. Мак-Вильямс Ф.Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. М., 1979.