УДК 621.391

ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ФРАКТАЛЬНОГО ХАОСА НА ОСНОВЕ КЛЕТОЧНОГО АВТОМАТА

А.А. ЮРЕВИЧ, А.Д. КИМ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 24 апреля 2012

Предложен метод формирования трехмерных фрактальных хаотических образов на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок. Сущность метода состоит в использовании клеточного автомата небольшого размера для формирования трехмерных хаотических образов произвольного размера в результате фрактального расширения и рекурсивной перестановки элементов матрицы состояний клеточного автомата на каждом такте его работы. Показано, что метод обеспечивает уменьшение вычислительной сложности формирования хаотических образов.

Ключевые слова: фрактальный хаос, клеточный автомат, рекурсивные перестановки.

Введение

Трехмерные хаотические образы применяются в задачах шифрования изображений [1], моделирования физических процессов [2], обработки сигналов [3]. Их недостатком является высокая вычислительная сложность. Снижение вычислительной сложности формирования хаотических образов возможно за счет фрактального расширения исходного хаотического пространства малой размерности. Для его построения использован простейший алгоритм на основе модели клеточного автомата. Для уменьшения блочного эффекта от фрактального расширения матрицы, предлагается использовать рекурсивные перестановки элементов матрицы.

Целью работы является разработка вычислительно простого метода формирования трехмерного фрактального хаоса на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок.

Клеточные автоматы

Клеточный автомат [4] представляет собой итеративную модель неструктурированного динамического хаоса, которая рассматривается в трехмерном бинарном пространстве размером $Z_C \times Y_C \times X_C$. Состояния элементов пространства на итерации t описываются хаотической матрицей $C(t) = \|c(z,y,x,t)\|_{\left(z=\overline{0,Z_C-1},\, y=\overline{0,Y_C-1},\, x=\overline{0,X_C-1}\right)}$, значения элементов которой рассчитываются по выражению

$$c(y,x,t) = \begin{cases} 1, \text{ при } \Big(\big(c(z,y,x,t-1)=0\big) \wedge \big(\text{sum}(z,y,x,t)=\theta_B\big)\Big) \vee \\ \qquad \vee \Big(\big(c(z,y,x,t-1)=1\big) \wedge \big(\theta_L \le \text{sum}(z,y,x,t) \le \theta_H\big)\Big), \\ 0, \text{ при } \Big(\big(c(z,y,x,t-1)=0\big) \wedge \big(\text{sum}(z,y,x,t) \ne \theta_B\big)\Big) \vee \\ \qquad \vee \Big(\big(c(z,y,x,t-1)=1\big) \wedge \neg\big(\theta_L \le \text{sum}(z,y,x,t) \le \theta_H\big)\Big) \end{cases} \tag{1}$$

при $z=\overline{0,Z_C-1}$, $y=\overline{0,Y_C-1}$, $x=\overline{0,X_C-1}$, $t=\overline{1,T}$, где T – число формируемых хаотических образов (число итераций); θ_B – порог рождения; θ_L, θ_H – пороговые значения жизни; $\mathrm{sum}(z,y,x,t)=\sum_{k=\mathrm{mod}_{Z_C}(z-1)}^{\mathrm{mod}_{Z_C}(z+1)}\sum_{j=\mathrm{mod}_{Y_C}(y-1)}^{\mathrm{mod}_{Y_C}(y+1)}\sum_{i=\mathrm{mod}_{X_C}(x-1)}^{\mathrm{mod}_{X_C}(x+1)}c(k,j,i,t-1)-c(z,y,x,t-1)$ – сумма элементов хаотической матрицы в окрестности элемента относительно $c(z,y,x,t-1)$; $C(0)$ – хаотическая матрица на итерации 0.

Для формируемой клеточным автоматом последовательности хаотических образов высока вероятность вырождения хаотической динамики. Хаотическая динамика стабилизи-руется [5] в многослойном клеточном автомате с дополнительными связями между слоями.

Рекурсивные перестановки

Рекурсивные перестановки задают фрактальный порядок выборки элементов матрицы, который описывает развертку *N*-мерного пространства в одномерное. Фрактальность развертки обеспечивает корреляцию между элементами исходного пространства в одномерном представлении после преобразования. Примером рекурсивной развертки с непрерывной траекторией (заполняющей пространство кривой) является развертка Гильберта (рис. 1) [6].

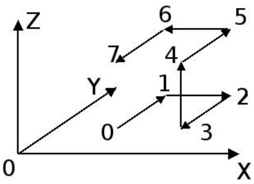


Рис. 1. Примитив рекурсивной развертки Гильберта

Матрица рекурсивной перестановки формируется вычислительно простым способом с помощью рекуррентного преобразования из матрицы примитива и множества матриц его ориентации. Примитив задает тип, исходную точку и траекторию рекурсивной развертки. Рекуррентное преобразование задает закон фрактального расширения матрицы примитива.

Метод формирования фрактальных хаотических образов

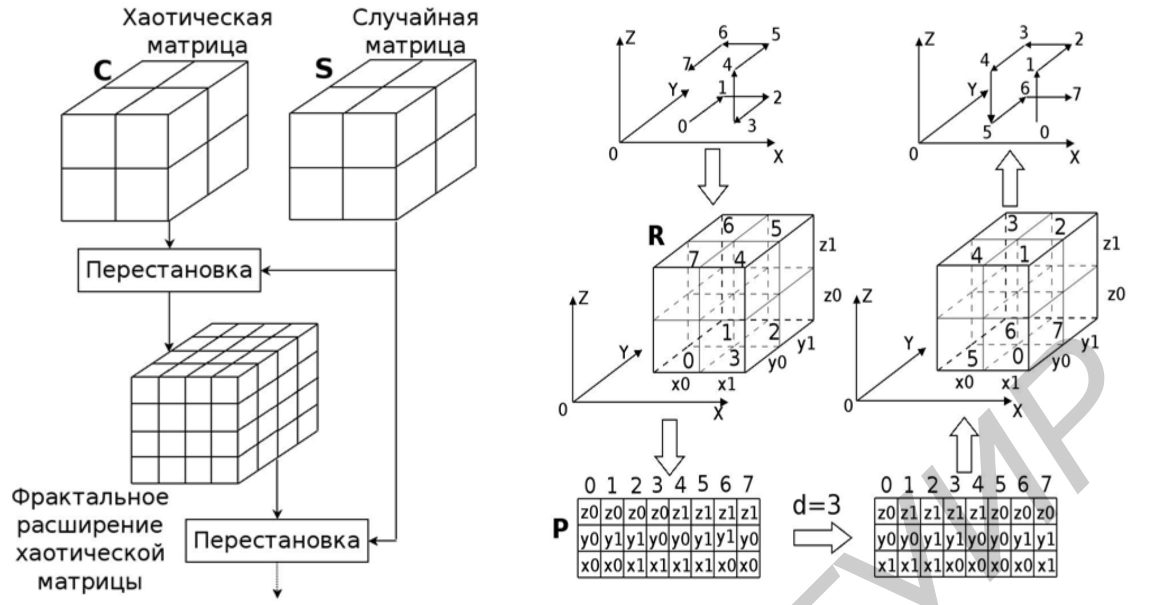
Предлагается метод формирования фрактальных хаотических образов на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок. Суть метода состоит в использовании модели клеточного автомата небольшого размера для формирования хаотических образов произвольного размера за счет фрактального расширения и рекурсивной перестановки элементов матрицы его состояний на каждой итерации. Метод сокращает вычислительную сложность формирования образов за счет уменьшения числа операций.

Алгоритм реализации предлагаемого метода состоит из следующих шагов.

1. Формирование и инициализация значений бинарной хаотической матрицы $C(t)=\left\|c(z,y,x,t)\right\|_{\left(z=\overline{0,Z-1},y=\overline{0,Y-1},x=\overline{0,X-1}\right)}$ на итерации $t=0$, где Z, Y, X – размеры хаотической матрицы в трехмерном пространстве; $t=\overline{0,T}$; T – число итераций. Матрица $C(t)$ является ядром фрактального расширения на каждой итерации (рис. 2,*а*).

2. Формирование и инициализация значений случайной матрицы $S(t)=\left\|s(z,y,x,t)\right\|_{\left(z=\overline{0,Z-1},y=\overline{0,Y-1},x=\overline{0,X-1}\right)}$ на итерации $t=0$ для определения величины циклического сдвига элементов хаотической матрицы $C(t)$.

3. Формирование и инициализация значений рекурсивной матрицы $R=\left\|r(z,y,x)\right\|_{\left(z=\overline{0,Z-1},y=\overline{0,Y-1},x=\overline{0,X-1}\right)}$, содержащей целые числа в интервале $[0,Z\times Y\times X-1]$. Расположение чисел определяет порядок выборки элементов матрицы R (рис. 2,*б*). Матрица R необходима для задания правила циклического сдвига элементов хаотической матрицы $C(t)$. Основное ограничение для правил циклического сдвига – сохранение окрестности. Ограничению удовлетворяют рекурсивные перестановки на основе разверток Гильберта.



а *б*

Рис. 2. Формирование фрактального хаоса: фрактальное расширение хаотической матрицы (*а*); рекурсивный циклический сдвиг элементов хаотической матрицы (*б*)

4. Формирование и инициализация координатного вектора $P = \left\| \left(p_Z(i), p_Y(i), p_X(i) \right) \right\|_{\left(i=\overline{0, Z\times Y\times X-1}\right)}$, значения элементов которого связаны со значениями элементов рекурсивной матрицы R в соответствии с соотношением

$$\forall z \forall y \forall x \forall i \left(r(z,y,x) = i \right) \leftrightarrow \left(\left(p_Z(i) = z \right) \wedge \left(p_Y(i) = y \right) \wedge \left(p_X(i) = x \right) \right). \quad (2)$$

Координатный вектор P необходим для реализации рекурсивного циклического сдвига элементов хаотической матрицы $C(t)$ по правилу, заданному в рекурсивной матрице R.

5. Инициализация счетчика итераций $t=1$.

6. Начало цикла формирования фрактальных хаотических образов. Пересчет значений хаотической матрицы $C(t)$ на основе модели клеточного автомата по выражению (1).

7. Пересчет значений случайной матрицы $S(t)$ с помощью выражения

$$s(z,y,x,t) = \mathrm{mod}_{ZYX}\left(c(z,y,x,t) + s(z,y,x,t-1) \right) \quad (3)$$

при $z=\overline{0,Z-1}$, $y=\overline{0,Y-1}$, $x=\overline{0,X-1}$.

8. Формирование и инициализация значений фрактальной хаотической матрицы $F(l,t) = \left\| f(z,y,x,l,t) \right\|_{\left(z=\overline{0,Z^{l+1}-1}, y=\overline{0,Y^{l+1}-1}, x=\overline{0,X^{l+1}-1}\right)}$ на уровне $l=0$, где $l=\overline{0,L-1}$; L – число уровней фрактального расширения. Значениям фрактальной хаотической матрицы $F(0,t)$ присваиваются значения исходной хаотической матрицы $C(t)$: $f(z,y,x,0,t) = c(z,y,x,t)$ при $z=\overline{0,Z-1}$, $y=\overline{0,Y-1}$, $x=\overline{0,X-1}$. Число L уровней фрактального расширения определяется исходя из размеров $Z\times Y\times X$ исходной хаотической матрицы $C(t)$ и размеров $Z_C \times Y_C \times X_C$ результирующей фрактальной хаотической матрицы $F(L,t)$ с помощью выражения

$$L = \max\left(\lceil \log_Z Z_C \rceil, \lceil \log_Y Y_C \rceil, \lceil \log_X X_C \rceil \right), \quad (4)$$

где $\lceil\ \rceil$ – операция округления до ближайшего целого числа с избытком.

9. Инициализация счетчика уровней фрактального расширения $l=1$.

10. Начало цикла фрактального расширения хаотической матрицы. Формирование фрактальной хаотической матрицы $F(l,t)$ на уровне l и вычисление ее значений по выражению

$$f(z,y,x,l,t)=c\left(p_Z\left(\operatorname{mod}_Z(d+z)\right),p_Y\left(\operatorname{mod}_Y(d+y)\right),p_X\left(\operatorname{mod}_X(d+x)\right)\right), \quad (5)$$

где $d=s\left(\lfloor z/Z\rfloor,\lfloor y/Y\rfloor,\lfloor x/X\rfloor\right)+f\left(\lfloor z/Z^l\rfloor,\lfloor y/Y^l\rfloor,\lfloor x/X^l\rfloor,l-1\right)$ – величина циклического сдвига элементов хаотической матрицы $C(t)$ по правилу рекурсивной перестановки (при $z=\overline{0,Z^{l+1}-1}$, $y=\overline{0,Y^{l+1}-1}$, $x=\overline{0,X^{l+1}-1}$), заданному рекурсивной матрицей R и координатным вектором P; $\lfloor\ \rfloor$ – операция округления до ближайшего целого с недостатком. За счет фрактального расширения ZYX элементам матрицы $F(l,t)$ соответствуют одни и те же значения $s\left(\lfloor z/Z\rfloor,\lfloor y/Y\rfloor,\lfloor x/X\rfloor\right)$ и $f\left(\lfloor z/Z^l\rfloor,\lfloor y/Y^l\rfloor,\lfloor x/X^l\rfloor,l-1\right)$, т.е. на l-м уровне фрактального расширения для $Z^{l+1}Y^{l+1}X^{l+1}$ элементов матрицы $F(l,t)$ рассчитываются только $Z^lY^lX^l$ значений циклического сдвига d.

11. Приращение значения счетчика уровней фрактального расширения $l=l+1$.

12. Проверка условия $l<L$. Если условие выполняется, то осуществляется переход на шаг 10, а иначе – окончание цикла фрактального расширения хаотической матрицы.

13. Приращение значения счетчика итераций $t=t+1$.

14. Проверка условия $t\le T$. Если условие выполняется, то осуществляется переход на шаг 6, а иначе – окончание цикла формирования образов и алгоритма.

В результате формируется множество фрактальных хаотических матриц $F(L,t)$ при $t=\overline{0,T}$ размером $Z_C\times Y_C\times X_C=Z^{L+1}\times Y^{L+1}\times X^{L+1}$, состоящих из $Z^L\times Y^L\times X^L$ преобразованных исходных хаотических матриц $C(t)$, элементы которых циклически сдвинуты по правилу рекурсивной перестановки, обеспечивающей сохранение локальной корреляции элементов исходной хаотической матрицы.

Оценка эффективности метода формирования фрактального хаоса

Для оценки эффективности предложенного метода формирования фрактальных хаотических образов на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок произведено его сравнение с базовым методом формирования неструктурированных хаотических образов на основе клеточного автомата. В качестве сопоставляемого параметра использована вычислительная сложность формирования результирующей хаотической матрицы.

Из выражения (1) следует, что для вычисления значения одного элемента хаотической матрицы базовым методом на основе клеточного автомата необходимо 57 операций. Для формирования хаотического образа размером $Z_CY_CX_C$ требуется число N_C операций, определяемое с помощью выражения

$$N_C=57Z_CY_CX_C. \quad (6)$$

Число N_F операций для формирования фрактального хаотического образа на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок определяется с помощью выражения

$$N_F=\sum_{i=6}^{9}N_S(i)+\sum_{l=1}^{L-1}\sum_{i=10}^{12}N_S(i,l)=64ZYX-3+4L+15\sum_{l=1}^{L-1}Z^lY^lX^l+11\sum_{l=1}^{L-1}Z^{l+1}Y^{l+1}X^{l+1}, \quad (7)$$

где $N_S(i)$, $N_S(i,l)$ – число операций на шаге i алгоритма образов (см. таблицу). Значения $N_S(i)$ и $N_S(i,l)$ учитывают операции извлечения из памяти O_{MR}, сложения O_A, сравнения O_C, по модулю O_M, записи в память O_{MS}, деления O_D, округления до ближайшего целого O_R.

Число операций в алгоритме формирования фрактальных хаотических образов

Шаги алгоритма, i	Выражения для определения числа $N_S(i)$ или $N_S(i,l)$ операций	Схема вычисления (индекс перед обозначением операции указывает на количество операций)
6	$N_S(6)=57ZYX$	$(27O_{MR}+26O_A+3O_C+1O_{MS})ZYX$
7	$N_S(7)=5ZYX$	$(2O_{MR}+1O_A+1O_M+1O_{MS})ZYX$
8	$N_S(8)=2ZYX$	$(1O_{MR}+1O_{MS})ZYX$
9	$N_S(9)=1$	$1O_{MS}$
10	$N_S(10,l)=15Z^lY^lX^l+11Z^{l+1}Y^{l+1}X^{l+1}$	$(6O_D+6O_R+2O_{MR}+1O_A)Z^lY^lX^l+$ $+(3O_M+3O_A+4O_{MR}+O_{MS})Z^{l+1}Y^{l+1}X^{l+1}$
11	$N_S(11,l)=3$	$1O_{MR}+1O_A+1O_{MS}$
12	$N_S(12,l)=1$	$1O_C$

На рис. 3 представлены зависимости числа операций N_F (сплошной линией) и N_C (прерывистой линией) от размера $Z_C \times Y_C \times X_C$ формируемой хаотической матрицы при фиксированном размере ядра фрактального расширения. Предложенный метод формирования образов на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок уменьшает вычислительную сложность до 5 раз по сравнению с базовым методом на основе клеточного автомата.

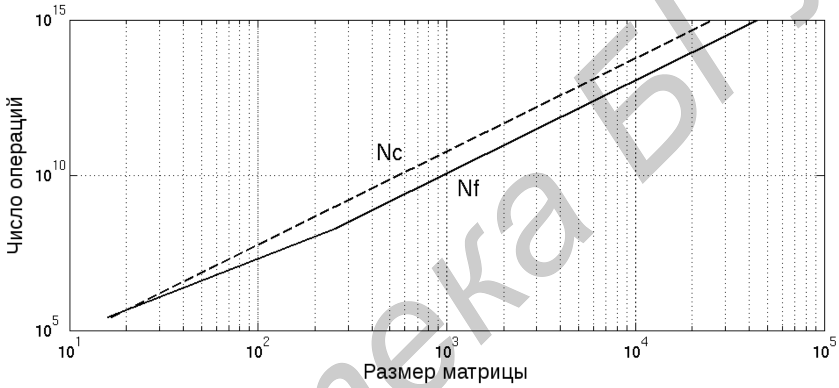


Рис. 3. Зависимость числа операций от размера формируемой хаотической матрицы

Заключение

Предложен метод формирования фрактальных хаотических образов на основе клеточного автомата и рекурсивных перестановок. Сущность метода состоит в использовании клеточного автомата небольшого размера для формирования хаотических образов произвольного размера в результате фрактального расширения и рекурсивной перестановки элементов матрицы состояний клеточного автомата на каждом такте его работы. Установлено, что метод обеспечивает уменьшение вычислительной сложности формирования хаотических образов до 5 раз по сравнению с методом на основе модели клеточного автомата.

GENERATION OF THREE-DIMENSIONAL FRACTAL CHAOS BASED ON CELLULAR AUTOMATON

A.A. YUREVICH, A.D. KIM

Abstract

A generator of three-dimensional chaos is proposed in this paper. The generator is based on fractal widening of the small kernel matrix and cellular automaton. The alignment effect is minimized by cyclic shifting of the state matrix elements. An estimation of the computational complexity of the generator is presented. It is shown that this generator compared to the three-dimensional chaos generator based on cellular automaton provides a reduction in the computational complexity.

Литература

1. *Ahmad A.A.* // International Journal on Computer Science and Engineering. 2009. Vol. 2 (1). P. 46-50.
2. *Toosizadeh S.* // International Conference on Computer and Software Modeling. 2011. Vol. 14. P. 43-47.
3. *Silva C.P.* // Proc. of IEEE Aerospace Conference. 2000. P. 279-299.
4. *Тоффоли Т.* Машины клеточных автоматов. М., 1991.
5. *Борискевич А.А., Горнович И.Л., Цветков В.Ю.* // Докл. БГУИР. 2006. №6. С. 30-39.
6. *Bader M.* // Springer-Verlag New York Inc. 2012. P. 18-27.