

УДК 621.391.7:512.772

ФУРЬЕ-АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-ОГРАНИЧЕННОЙ СУММЫ СИГНАЛА И НОРМАЛЬНОГО ШУМА

М.Ю. ХОМЕНОК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 14 октября 2015

Приведены основные результаты статистического анализа структурных свойств сигнальной компоненты клипированной суммы сигнала и шума в соответствии с материалами депонированной рукописи [1].

Ключевые слова: ряд Фурье, корреляционный анализ, нормальный узкополосный стационарный процесс, фазоманипулированный сигнал, двумерная функция распределения, отношение сигнал-шум, амплитудный ограничитель.

Ряд Фурье по системе фазоманипулированных функций

Процесс на выходе амплитудного ограничителя, соответствующий знаковой функции от входного процесса, определяемого аддитивной смесью узкополосных сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$, равен

$$Y(t) = \text{sign}[x(t)] = \text{sign}[\cos(\Phi(t))], \quad (1)$$

где $\Phi(t) = 2\pi f_o t + \varphi_x(t)$,

$$\varphi_x(t) = \arctg \frac{S(t)\sin[\varphi_s(t)] + N(t)\sin[\varphi_n(t)]}{S(t)\cos[\varphi_s(t)] + N(t)\cos[\varphi_n(t)]},$$

$S(t) = S_o \cos[2\pi f_o t + \varphi_s(t)]$ и $n(t) = N(t)\cos[2\pi f_o t + \varphi_n(t)]$, а $S_o(t), N(t) \geq 0$.

Поскольку $\Phi(t)$ в области определения является однозначной функцией, то система тригонометрических функций вида

$$\{\cos[n\Phi(t)]\}, n = \overline{1, \dots, N}, \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (2)$$

является ортогональной в области значений φ . Тогда, учитывая, что в области значений Φ процесс (1) представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов $A_{10}(t)$, разложение (1) в ряд Фурье по системе функций (2) имеет вид

$$\text{sign}[\cos\Phi(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} (-1)^k \cos[(2k+1)\Phi(t)]. \quad (3)$$

Таким образом, импульсная последовательность может быть представлена рядом Фурье по системе фазоманипулированных функций (2), ортогональных в области значений фазы $\Phi(t)$, но не ортогональных во временной области, если определен закон изменения фазы, согласно которому формируется структура последовательности.

Проиллюстрируем использование ряда (3) на примере определения функции автокорреляции (ФАК) функционального преобразованного в амплитудном ограничителе нормального узкополосного стационарного шума (НУСПШ) $n(t): N[0, R(\tau)]$, где $R(\tau) = R_0(\tau) \cos(2f_0\tau)$. Для этого определим ФАК косинуса фазы этого процесса, умноженной на целое n число раз.

Поскольку $\cos[n\varphi(t)]$ представляет безынерционное функциональное преобразование $\varphi(t)$, то на основе теоремы о среднем ФАК $\cos[n\varphi(t)]$ определится согласно выражению

$$B_n(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi_1) \cos(n\varphi_2) W_2(\varphi_1, \varphi_2; \tau) d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (4)$$

где $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$, а двумерная плотность вероятности фазы [2]

$$W_2(\varphi_1, \varphi_2; \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{jr(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (5)$$

$$\text{при } |\varphi_1| \leq \pi, |\varphi_2| \leq \pi, A_r = \frac{1 - R_0^2}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(m + 1 + \frac{r}{2}\right)}{m!(m+r)!} R_0^{r+2},$$

где $\Gamma\left(m + 1 + \frac{r}{2}\right)$ – гамма-функция.

Представим (5) в (4) и, меняя порядок суммирования и интегрирования, находим:

$$B_n(\tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi_1) \cos(n\varphi_2) e^{jr\varphi_1} e^{jr\varphi_2} d\varphi_1 d\varphi_2.$$

В силу ортогональности тригонометрических функций

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi_1) e^{jr\varphi_1} d\varphi_1 = \begin{cases} \pi, & r = \pm n \\ 0 & r \neq \pm n \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi_2) e^{jr\varphi_2} d\varphi_2 = \begin{cases} \pi, & r = \pm n \\ 0 & r \neq \pm n \end{cases}.$$

С учетом этих значений ФАК $\cos[n\varphi(t)]$ принимает вид: $B_n(\tau) = 2\pi^2 A_n$, что при $n=1$ совпадает с результатом, представленным в виде формулы 8.103 [2].

Соответственно, учитывая, что процесс на выходе амплитудного ограничителя определяется выражением (3), а также принимая во внимание наличие детерминированной составляющей фазы $\omega_0 t$, ФАК процесса на выходе идеального симметричного амплитудного ограничителя запишется в виде:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{32}{(2k+1)^2} A_{2k+1} \cos[(2k+1)\omega_0\tau] = \\ &= \frac{8}{\pi^2} (1 - R_0^2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\Gamma^2\left(m + k + \frac{3}{2}\right)}{m!(m+2k+1)} R_0^{2k+2m+1} \cos[(2k+1)\omega_0\tau]. \end{aligned}$$

При $f_0 = 1/2f_T$, $\varphi_x(t) \in 0, \pi$ и $t \in [n\tau_{и}, (n+1)\tau]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ случайная импульсная последовательность соответствует импульсной последовательности прямоугольных импульсов с тактовой частотой $f_T = 1/\tau_{и}$.

Эта последовательность может быть представлена рядом Фурье по нечетным фазоманипулированным гармоникам, точки фазовой манипуляции которых совпадают со значащими моментами исходной последовательности:

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)} \cos\{(2k+1)[\pi f_T t + 1/2\varphi_T + \varphi(t)]\},$$

где f_T , φ_T – соответственно тактовая частота и начальная фаза гармоники на тактовой частоте, $\varphi(t)$ – закон фазовой манипуляции.

Из него следует, что первая фазоманипулированная гармоника представляет последовательность косинусоидальных импульсов, которая может быть получена путем когерентного преобразования несущей частоты f_0 ФМнС с манипуляцией фазы на 180° до значения, равного полутактовой частоте.

В этом случае структура сформированной импульсной последовательности $A'(t)$ является преобразованной по отношению к исходной $A(t)$ и связана с ней суммированием по модулю два с меандром полутактовой частоты $A_{10}(t)[1]$:

$$A_{10}(t) = A(t) \oplus A'(t).$$

Ряд Фурье сигнальной компоненты случайной импульсной последовательности

Анализируемая модель сигнала соответствует идеальному симметричному амплитудному ограничителю случайного процесса, представляющего собой сумму ФМнС и НУСШ. Двумерная функция распределения этого процесса имеет вид [2]:

$$W_2(x_1, x_2; t, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2 - 2R(x_1-a_1)(x_2-a_2) + (x_2-a_2)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}},$$

где $a_1 = S(t)$, $a_2 = S(t+\tau)$, $R = R(\tau)$ – коэффициент корреляции и σ^2 – дисперсия стационарного процесса $x(t)$.

Поскольку характеристика $f(x)$ идеального симметричного амплитудного ограничителя допускает представление контурным интегралом, то

$$g(ju) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jxu} dx = \begin{cases} (ju)^{-1}, & x > 0 \\ -(ju)^{-1}, & x \leq 0 \end{cases}. \quad (6)$$

ФАК ФМнС и НУСШ может быть определена согласно выражению [2]:

$$B_n(\tau, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{c_1} \int_{c_2} g(ju_1) g(ju_2) e^{j(a_1u_1 + a_2u_2)} e^{-\sigma^2/2(u_1^2 + 2Ru_1u_2 + u_2^2)} du_1 du_2. \quad (7)$$

В интеграле (7) только множитель $e^{j(a_1u_1 + a_2u_2)}$ содержит величины $a_1 = S(t)$ и $a_2 = S(t+\tau)$, зависящие от времени. Поэтому при усреднении корреляционной функции $B(\tau, t)$ по времени, усредняется только этот множитель. Обозначая

$$\Theta_s(u_1, u_2; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j[S(t)u_1 + S(t+\tau)u_2]} dt, \quad (8)$$

находим усредненное выражение корреляционной функции случайного процесса на выходе амплитудного ограничителя в виде

$$B(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{c_1} \int_{c_2} g(ju_1) g(ju_2) \Theta_s(u_1, u_2; \tau) e^{-\sigma^2/2(u_1^2 + 2Ru_1u_2 + u_2^2)} du_1 du_2, \quad (9)$$

Детерминированное слагаемое входного процесса $S(t)$ на интервале $[0, T]$ представим выражением

$$S(t) = S_0(t) \cos[2\pi f_o t + \varphi_s(t)] = S \cos \Phi.$$

Тогда, воспользовавшись разложением по формуле 8.5114 [3],

$$e^{jzS\cos\Phi} = \sum_{m=0}^{\infty} j^m \varepsilon_m J_m(zS) \cos(m\Phi),$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ при $m = 1, 2, \dots$, а $J_m(zS)$ – бesselева функция первого рода, получим, что

$$e^{j[u_1S(t)+u_2S(t+\tau)]} = \sum_{n=0}^{\infty} j^{2n} \varepsilon_n^2 J_n(u_1S_1) J_n(u_2S_2) \cos(n\Phi_1) \cos(n\Phi_2) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} j^{(n+l)} \varepsilon_n \varepsilon_l J_n(u_1S_1) J_l(u_2S_2) \cos(l\Phi_1) \cos(n\Phi_2). \quad (10)$$

С учетом (10) соотношение (8) запишется в виде

$$\Theta_s(u_1, u_2; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} j^{2n} \varepsilon_n^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} J_n(u_1S_1) J_n(u_2S_2) \cos(n\Phi_1) \cos(n\Phi_2) dt.$$

Тогда, используя разложение множителя

$$e^{-\sigma^2 R u_1 u_2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma^{2k}}{k!} R^k u_1^k u_2^k$$

и разделяя в (9) переменные интегрирования, выражение для усредненной ФАК процесса на выходе амплитудного ограничителя с характеристикой, определенной в (6), примет вид

$$B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \varepsilon_n^2 \frac{\sigma^{2k}}{k!} R^k B_{nk} \quad (11)$$

где

$$B_{nk} = B_{nk}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h_{nk}(t) \cos[n\Phi(t)] h_{nk}(t+\tau) \cos[n\Phi(t+\tau)] dt, \quad (12)$$

$$h_{nk}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right) j^{n+k-1} \int_{c_1} u^{k-1} J_n(uS) e^{\frac{\sigma^2 u^2}{2}} du = \frac{1}{n!} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right]^k \left[\frac{S}{\sqrt{2}\sigma}\right]^n \frac{{}_1F_1\left(\frac{n+k}{2}, n+1, -\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma[1-(n+k)/2]}, \quad (13)$$

где ${}_1F_1\left(\frac{n+k}{2}, n+1, -\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, форм. 7.94 [2].

Выражение (12) представляет собой ФАК сигнальных составляющих на выходе амплитудного ограничителя, которые могут быть определены при анализе энергетического спектра процесса с учетом структурных свойств информационной манипулирующей последовательности. По своей структуре ряд (11) совпадает с выражением ФАК для гармонического сигнала и НУСШ, приведенного в [2]. Поэтому его анализ выполнен применительно только к сигнальной слагаемой процесса, ФАК которой определяется из ряда (11) при $k = 0$.

Так как гамма-функция при целом отрицательном не ограничена, то, как видно из (13), $h_{n0} = 0$ при $n = 2r$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, ФАК информационной слагаемой процесса на выходе амплитудного ограничителя может быть представлена в виде суммы нечетных спектральных полос в соответствии с выражением (12), при $n = 2r + 1$. Поэтому, как следует из (12), информационная составляющая процесса на выходе амплитудного ограничителя определяется в виде

$$y_s(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_{2r+1,0} \cos\{(2r+1)[2\pi f_o t + \varphi_s(t)]\}. \quad (14)$$

С другой стороны, так как $n(t)$ есть НУСШ с нулевым средним, а $s(t)$ и $n(t)$ независимы, то слагаемое процесса на выходе амплитудного ограничителя, соответствующее информационной составляющей, может быть определено как его среднее значение, т.е.

$$y_s(t) = y_s = \overline{\text{sign}[S(t) + n(t)]} = \text{erf} \left[\frac{S(t)}{\sqrt{2}\sigma} \right], \quad (15)$$

где $\text{erf}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \exp(-y^2) dy$.

Из сравнения выражений (14) и (15) следует справедливость равенства

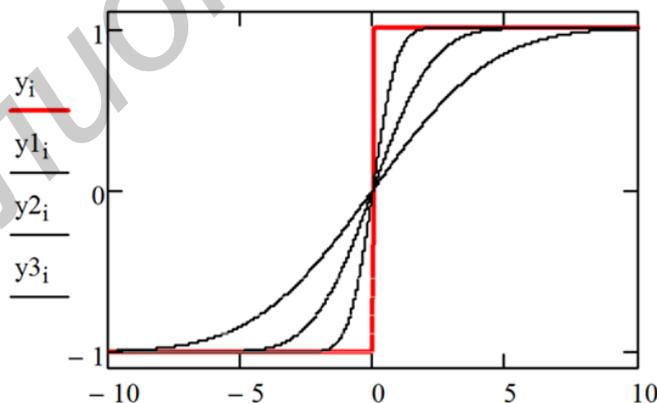
$$\text{erf} \left\{ \frac{S(t)}{\sqrt{2}\sigma_x} \cos[2\pi f_o t + \varphi_s(t)] \right\} = \sum_{r=0}^{\infty} h_{2r+1,0} \cos\{(2r+1)[2\pi f_o t + \varphi_s(t)]\}. \quad (16)$$

Заключение

Анализ выражения (16) позволяет выявить следующие особенности преобразования смеси ФМнС и НУСШ в идеальном амплитудном ограничителе:

- отсутствие искаженной фазовой структуры сигнала;
- для сигнальной составляющей на выходе амплитудного ограничителя справедливо представление в ряд Фурье по системе фазоманипулированных функций, определенных в соответствии с фазовой структурой сигнала на его входе, с коэффициентами Фурье, равными $h_{2r+1,0}$. Причем, если отношение сигнал-шум на входе ограничителя стремится к бесконечности, то коэффициенты ряда Фурье в (16) соответствуют коэффициентам Фурье для последовательности прямоугольных импульсов, т.е.: $h_{2r+1,0} \rightarrow 4 / [\pi(2r+1)]$;

- при большом отношении сигнал-шум на входе амплитудный ограничитель обладает формирующим по амплитуде свойством в соответствии с функциональной зависимостью $\text{erf}(ax)$. При a , стремящемся к бесконечности, функция $\text{erf}(ax)$ соответствует знаковой функции $\text{sign}(x)$, как это показано на рисунке, иллюстрирующем функциональное отображение среднестатистической компоненты. В этом случае равенство (16) будет соответствовать равенству (3).



Кривая функционального отображения среднестатистической компоненты клипированной смеси сигнала и нормального узкополосного шума: $\lim_{a \rightarrow \infty} \text{erf}(ax) = \text{sign}(x)$

FOURIER ANALYSIS OF AMPLITUDE-LIMITED SIGNAL AND NORMAL NOISE

M.J. HOMENOK

Abstract

The article reflects the main results of statistical analysis of clipped signal plus normal noise in view of Fourier series of the average signal component which is presented in compliance with the deposit manuscript [1].

Список литературы

1. *Хоменок М.Ю.* // Деп. в БелНИИНТИ №805Бе-Д83. 1983.
2. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1974.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.