

УДК 531.1:621.313.13

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ИНТЕРАКТИВНОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ

С.Е. КАРПОВИЧ, В.В. КУЗНЕЦОВ, М.М. ФОРУТАН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 22 марта 2016

Разработана математическая модель расчета функций положения управляемых позиционеров в зависимости от положения и ориентации в трехмерном пространстве рабочей платформы системы перемещений с шестью степенями свободы, позволяющая проводить имитационное моделирование в среде MATLAB кинематики пространственной системы перемещений с интерактивной визуализацией результатов.

Ключевые слова: обратная задача кинематики, пространственная система перемещений, планарные позиционеры, рабочая область.

Введение

Современное автоматизированное оборудование, включая прецизионные обрабатывающие центры, системы пространственного позиционирования и ориентации механических и оптических компонент в микро- и наноэлектронике, симуляторы сложных пространственных движений, роботы и манипуляторы представляют собой сложные механо-аппаратно-программные комплексы, относящиеся к классу мехатронных систем. Центральным узлом таких систем, как правило, является пространственная система перемещений, обеспечивающая реализацию требуемых траекторных перемещений рабочей платформы в трехмерном пространстве. С появлением гибридного многокоординатного привода синхронного типа [1], реализующего электронную редукцию перемещений без механических трансмиссий, стало возможным конфигурирование пространственных систем перемещений на механизмах параллельной кинематики с необходимым числом управляемых степеней свободы.

При формировании программируемых движений системами перемещений на базе механизмов параллельной кинематики актуальной является задача по определению управляющих позиционных функций ведущих звеньев многокоординатного привода по заданному перемещению выходного звена в трехмерном пространстве. Такая задача в теории роботов и мехатронных систем называется обратной задачей кинематики. Алгоритм ее решения используется при реализации имитационного моделирования кинематики пространственной системы перемещений и разработке алгоритмов контурного управления по кинематическим критериям.

Пространственная система перемещений

Алгоритмизация обратной задачи кинематики выполнена для предложенной в настоящей работе пространственной системы перемещений с шестью степенями свободы (рис. 1), сконфигурированной из многокоординатного привода прямого действия на трех планарных позиционерах [2] и механизма параллельной кинематики в виде подвижного раскрывающегося тетраэдра.

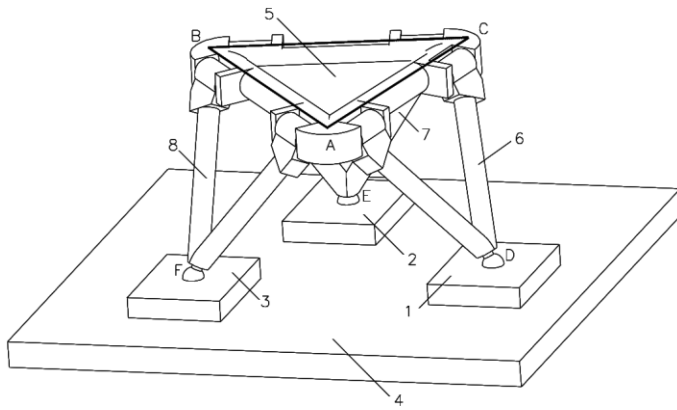


Рис. 1. Пространственная система перемещений

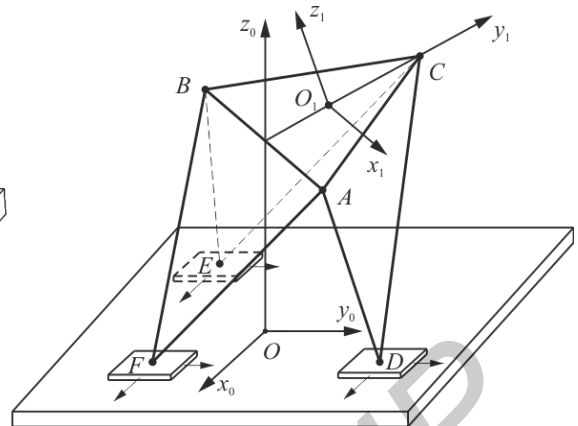


Рис. 2. Расчетная схема системы перемещений

Система перемещений с шестью степенями свободы, представленная на рис. 1, состоит из группы Ассур [3] третьего класса (звенья 5, 6, 7, 8) и шестикоординатного привода в виде трех управляемых планарных позиционеров 1, 2, 3, перемещающихся на одном общем для них статоре 4. Такая конструктивная особенность системы перемещений накладывает специфические требования, которые необходимо учитывать при разработке алгоритмов для имитационного моделирования ее кинематики. Расчетная схема для формирования математической модели рассматриваемой системы перемещений представлена на рис. 2.

Как видно из расчетной схемы, топологически система перемещений образована четырьмя шарнирно-связанными треугольными звеньями ABC , ADC , CEB и AFB , поворотные взаимные движения которых происходят по осям взаимного поворота, линиям AC , CB и AB . Соответственно, замыкание этой кинематической конфигурации осуществляется в одной общей для всех сферических шарниров плоскости через три планарных привода.

Алгоритмизация математической модели

Для описания топологии рассматриваемой системы перемещений такой пространственной конфигурации выберем основные системы координат: $S_0(x_0, y_0, z_0)$ – неподвижную, связанную со статором 4 планарного многокоординатного привода и подвижную $S_1(x_1, y_1, z_1)$ – жестко связанную с подвижным выходным звеном ABC , движение которого в пространстве определяется требованиями на программируемые перемещения. Для вывода расчетных зависимостей математической модели кинематики введем на каждом из трех подвижных треугольных звеньев по две системы координат, одна из которых определяет геометрию звена, а другая его поворот относительно сопрягаемой с ним платформы ABC с обобщенными координатами, соответственно ω_1 , ω_2 и ω_3 . Информация о выборе этих систем координат более подробно будет представлена ниже при описании математической модели одного из параллельных фрагментов механизма параллельной кинематики.

Положение подвижной системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$, связанной с рабочей платформой 5 в системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$, жестко связанной с неподвижным статором 4, будем представлять в матричном виде в однородных координатах и задавать матрицей четвертого порядка вида:

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_0) & \cos(y_1, x_0) & \cos(z_1, x_0) & x_{01} \\ \cos(x_1, y_0) & \cos(y_1, y_0) & \cos(z_1, y_0) & y_{01} \\ \cos(x_1, z_0) & \cos(y_1, z_0) & \cos(z_1, z_0) & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В матрице (1) начало O_1 подвижной системы координат S_1 , выраженное в системе координат S_0 , определяется элементами четвертого столбца x_{01} , y_{01} , z_{01} , а остальные элементы верхней квадратной матрицы размера 3×3 – в виде направляющих косинусов будут определять ориентацию системы координат S_1 по отношению к системе координат S_0 .

Однако задание ориентации направляющими косинусами приводит к существенным вычислительным трудностям, связанным, в первую очередь, с необходимостью учитывать

условие ортогональности по строкам и столбцам матрицы M_{01} . Поэтому в качестве углов ориентации предложено использовать три независимых угла Эйлера: φ, θ, ψ [4], с учетом которых матрица (1) будет иметь вид:

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & x_{01} \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & y_{01} \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, задавая конкретные значения углов Эйлера φ, θ, ψ , определяющие текущую ориентацию системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ в системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ и числовые значения x_{01}, y_{01}, z_{01} , определяющие положение начала системы координат O_1 получим численные значения всех элементов матрицы (2). В этом случае матрица M_{01} позволяет преобразовывать и пересчитывать координаты любых точек T_i , заданных в системе координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ в систему координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ по матричному выражению:

$$R_0^{T_i} = M_{01} R_1^{T_i}, \quad (3)$$

где $R_0^{T_i}$ и $R_1^{T_i}$ – матрицы, задаваемые координатами положения любой точки T_i подвижной платформы, соответственно, в собственной и неподвижной системах координат.

Для вывода аналитических функций алгоритма решения обратной задачи кинематики, рассмотрим математическое описание топологии отдельного фрагмента в виде кинематической цепи, например, AFB , связанной с платформой ABC вращательным соединением AB . Этот фрагмент в виде расчетной схемы с назначенными промежуточными системами координат S_2 и S_3 представлен на рис. 3.

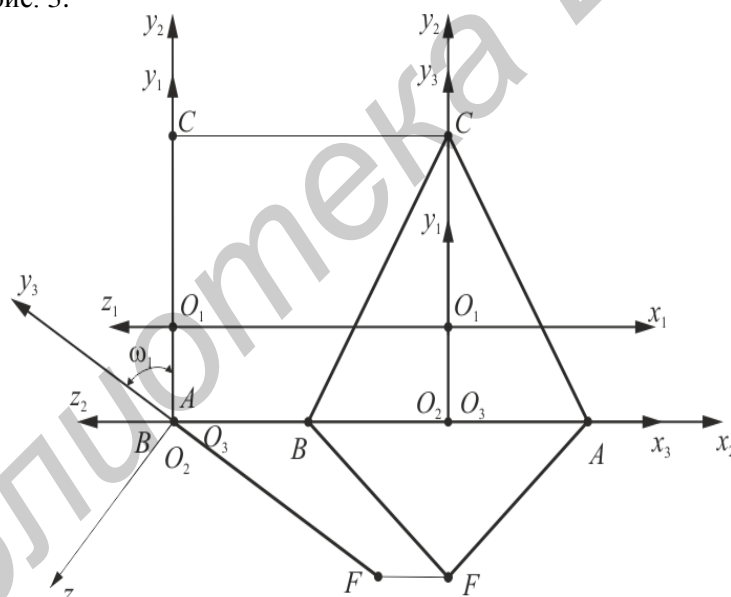


Рис. 3. Расчетная схема кинематического фрагмента

Для этого фрагмента на рис. 3 представлен выбор не только необходимых систем координат S_2 и S_3 , но и принятая обобщенная координата поворота звена AFB в виде угла ω_1 , определяющего относительный поворот звена AFD по отношению к звену ABC во вращательном соединении AB . В соответствии с принятым координатным описанием топологии этого параллельного фрагмента получим матрицы перехода между соответствующими системами координат S_2 и S_1, S_3 и S_2 . Эти матрицы будут иметь вид:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_1 & -\sin \omega_1 & 0 \\ 0 & \sin \omega_1 & \cos \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

С учетом (2) и (4) полная цепочка матричных преобразований координат положения точки F будет иметь вид:

$$R_0^F = M_{01}M_{12}M_{23}R_3^F. \quad (5)$$

Выполнив матричные умножения в соответствии с (5) окончательно получим:

$$R_0^F = \frac{\sqrt{3}}{2} a \begin{bmatrix} a_{12} \left(\cos \omega_1 + \frac{1}{3} \right) - a_{13} \left(\sin \omega_1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{14} \\ a_{22} \left(\cos \omega_1 + \frac{1}{3} \right) - a_{23} \left(\sin \omega_1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{24} \\ a_{32} \left(\cos \omega_1 + \frac{1}{3} \right) - a_{33} \left(\sin \omega_1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{34} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Так как положение точки F ограничено общей плоскостью перемещения точек D , E и F , то есть плоскостью x_0Oy_0 , по которой осуществляется кинематическое замыкание, то его аналитическое условие будет иметь вид: $z_0^F = 0$. Или из (6) получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a \left(a_{32} \left(\cos \omega_1 + \frac{1}{3} \right) - a_{33} \left(\sin \omega_1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{34} \right) = 0. \quad (7)$$

В результате преобразования выражения (7) в квадратное уравнение относительно ω_1 окончательно получим искомый угол ω_1 через его косинус в виде:

$$\cos \omega_1 = \frac{-M_1 P_1 \pm \sqrt{M_1^2 P_1^2 - (M_1^2 + N_1^2)(P_1^2 + N_1^2)}}{M_1^2 + N_1^2}, \quad (8)$$

$$\text{где } M_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} a a_{32}; \quad N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} a a_{33}; \quad P_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} a a_{32} - a_{34}.$$

Выражение (7) позволяет найти два возможных значения угла $\omega_1 (\omega_1^1, \omega_1^2)$ соответствующие двум конфигурационным вариантам положения подвижного звена AFB по отношению к плоскости x_0Oy_0 . Координаты x_F и y_F положения точки F на этой плоскости определяются с учетом найденного ω_1 по следующим формулам, вытекающим из матричного представления (6):

$$\begin{aligned} x_F &= a_{12} \left(\cos \omega_1 + \frac{1}{3} \right) - a_{13} \left(\sin \omega_1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{14}; \\ y_F &= a_{22} \left(\cos \omega_1 + \frac{1}{3} \right) - a_{23} \left(\sin \omega_1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{24}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi$, $a_{13} = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi$, $a_{14} = x_{01}$,
 $a_{22} = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi$, $a_{23} = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi$, $a_{24} = y_{01}$.

Аналогичным образом, как и для точки F , осуществляется алгоритмизация математических моделей для точек D и E .

Алгоритм генерации опорных точек

Пусть любая конкретная позиция платформы будет характеризоваться шестикоординатным вектором $\vec{R} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi)$.

Генерацию параметров траектории в работе предлагается осуществлять путем интерполяции траектории по каждой координате вектора \vec{R} отдельно, таким образом, чтобы при переходе от одного положения к следующему все шесть координат изменились синхронно и одновременно достигали своих конечных значений. При этом для формируемой траектории генерируются необходимые промежуточные и последующие точки путем соответствующей интерполяции [5]. Начальное число точек, расстояние между ними, точность интерполяции

являются исходными и задаются пользователем, осуществляющим обработку параметров траектории.

Пусть на траектории, подлежащей реализации, задано n последовательных точек M_i ($i = 1, 2, \dots, n$), по которым необходимо сформировать траекторию для рассматриваемой многокоординатной системы перемещений. Выберем на траектории две любые последовательные точки M_k и M_{k+1} , в соответствии с которыми необходимо изменить положение платформы, характеризуемое вектором $\vec{R} = (x_k, y_k, z_k, \varphi_k, \theta_k, \psi_k)$, на положение, характеризуемое вектором $\vec{R} = (x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, \varphi_{k+1}, \theta_{k+1}, \psi_{k+1})$.

Для описания линейного перемещения между точками M_k и M_{k+1} будем использовать расстояние между ними в виде $d_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}$.

Полученное значение d_k сравнивается с заданным максимально допустимым расстоянием d_{\max} между соседними точками, допускаемым из условия желаемой точности интерполяции. Если $d_k > d_{\max}$, то необходимое полное число точек на интервале рассчитывается как большее целое значение из выражения $n_d = d_k / d_{\max}$. Выбором d_{\max} можно изменить число опорных точек, используемых при интерполяции.

Для описания поворота вводится обобщенный угол поворота ω , таким образом, чтобы угловой поворот платформы из положения M_k , характеризуемого заданными углами Эйлера $\varphi_k, \theta_k, \psi_k$, в положении M_{k+1} , характеризуемого углами Эйлера $\varphi_{k+1}, \theta_{k+1}, \psi_{k+1}$, выполнялся бы вокруг соответствующей оси Ω . Пусть суммарный вектор углового положения платформы в точке M_k равен $\vec{v}_k = (v_x^k, v_y^k, v_z^k)$, а суммарный вектор углового положения в точке M_{k+1} равен $\vec{v}_{k+1} = (v_x^{k+1}, v_y^{k+1}, v_z^{k+1})$. То исходя из этих векторов по их скалярному произведению, $\vec{v}_k \cdot \vec{v}_{k+1} = |\vec{v}_k| \cdot |\vec{v}_{k+1}| \cdot \cos \omega$, может быть найден обобщенный угол ω углового перемещения из положения M_k в положение M_{k+1} . Окончательно угол ω будет равен:

$$\omega = \arccos \left(\frac{v_x^k \cdot v_x^{k+1} + v_y^k \cdot v_y^{k+1} + v_z^k \cdot v_z^{k+1}}{\sqrt{(v_x^k)^2 + (v_y^k)^2 + (v_z^k)^2} \cdot \sqrt{(v_x^{k+1})^2 + (v_y^{k+1})^2 + (v_z^{k+1})^2}} \right). \quad (10)$$

При задании максимального значения ω_{\max} для угла ω находится число опорных точек $n_\omega = \omega / \omega_{\max}$. Для каждой пары соседних точек рассчитывается n_d и n_ω и по наибольшему из них определяются опорные точки для последующей интерполяции.

Таким образом, по алгоритму, описанному выше, определяются опорные точки соответствующего разбиения траектории, по которым с помощью программы линейной или сплайновой интерполяции осуществляется расчет координат всех точек разбиения.

Компьютерное моделирование

На основании разработанной математической модели и выполненной алгоритмизации были разработаны программы имитационного компьютерного моделирования кинематики в среде MATLAB, в том числе пользовательский интерфейс решения прямой и обратной задачи кинематики с интерактивной визуализацией самого исполнительного механизма, границ рабочей области и графиков изменения координат, скорости и ускорения характерных точек. Пользовательский интерфейс, разработанный в среде MATLAB, представлен на рис. 4, он включает окно задаваемых конструкций параметров – 1, углов ориентации φ, θ, ψ – 2, линейных координат x_0, y_0, z_0 – 3, панель команд – 4, панель числовых результатов моделирования – 5 и панель интерактивной визуализации результатов в виде трехмерной визуализации – 6.

Разработанная программа имитационного моделирования позволяет проводить компьютерное исследование с интерактивной визуализацией самой системы перемещений и кинематических характеристик любой точки или подвижного звена в виде графиков функций положения, скорости, ускорения с генерацией опорных точек на программируемой траектории. Кроме того, можно проводить исследование границ рабочей области в 2D и 3D интерактивном представлении.

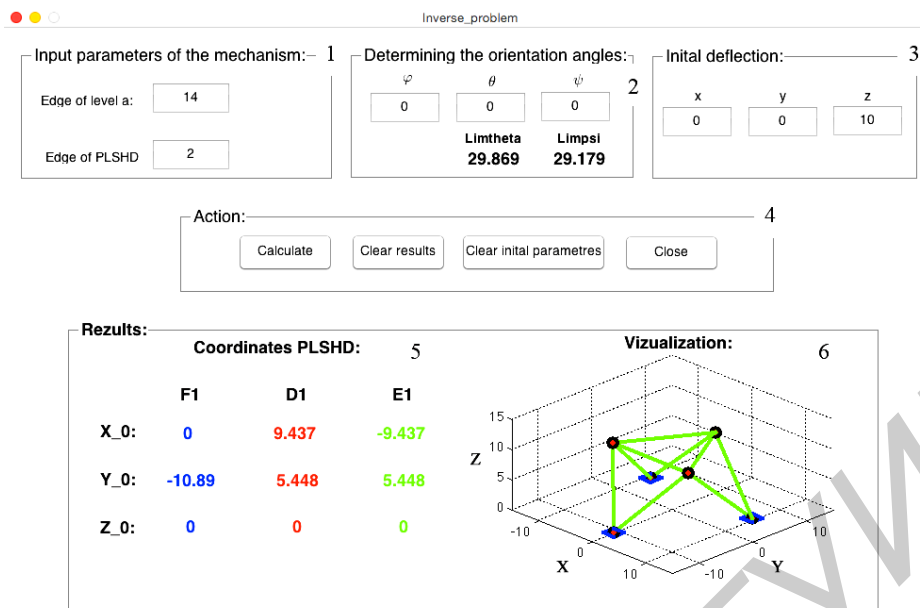


Рис. 4. Интерфейс программы моделирования обратной задачи кинематики

Выводы

Предложен алгоритм решения обратной задачи кинематики, который позволяет в аналитическом виде находить функции положения ведущих элементов пространственной системы перемещений по заданному положению и ориентации рабочей платформы. Этот алгоритм является основой для приведения имитационного компьютерного моделирования кинематических характеристик – как отдельных звеньев, так и системы перемещений в целом. Алгоритм имеет модульную сегментированную структуру, инвариантную к числу параллельных кинематических цепей и числу степеней свободы исполнительного механизма параллельной кинематики. Необходимые для имитационного моделирования уравнения формируются программно по структурному признаку механизма параллельной кинематики.

SIMULATION OF SPATIAL KINEMATICS DIPLACEMENT SYSTEM WITH INTERACTIVE VIZUALZITION OF RESULTS

S.E. KARPOVICH, V.V. KUZNIATSOU, M.M. FORUTAN

Abstract

The mathematical model for calculation of position functions of controlled positioners depending on position and orientation of execution platform of motion system in three-dimension space with six degrees of freedom was developed. The model allows carrying out the imitational modelling of kinematic characteristics of spatial motion system with interactive visualization in MATLAB environment.

Keywords: the inverse kinematics problem, spatial motion system, planar positioners, workspace.

Список литературы

1. Карпович С.Е., Жарский В.В., Дайняк И.В. и др. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования. Минск, 2013.
2. Жарский В.В. // Докл. БГУИР. 2007. № 6. С. 44–49.
3. Карпович С.Е., Жарский В.В., Дайняк И.В. и др. Моделирование механизмов параллельной кинематики в среде MatLab / Simulink. Минск, 2013.
4. Hada S., Takeda Y., Hanagasaki S. // Proceeding of robotic symposia, Kotohima, Japan, 2011. №6. P. 89–100.
5. Zentner J. Zur optimalen Gestaltung von Parallelking matikmaschinen mit Planavantrieben. Illmenan, 2006.