Философско-методологическая концепция обоснования математики в контексте современной философии образования

Н. В. Михайлова,
кандидат философских наук, доцент,
зав. кафедрой социально-гуманитарных дисциплин МГВРК

Проблему обоснования современной математики в контексте современной философии образования можно рассматривать как самостоятельную область философского знания, предметом которого являются закономерности функционирования математического знания и развития сферы образования во всех ее аспектах. Проблемы обучения и понимания как аспекты познавательной деятельности анализировал еще Платон, рассматривая ее в социальном контексте. Широкий спектр мнений по задачам университетского математического образования указывает на недостаточность философской рефлексии познавательных аспектов образования и на необходимость анализа актуальных философских вопросов обоснования математики. Поэтому создание хорошего курса математики для конкретной специальности связано с нахождением разумного баланса между объемом декларируемых математических утверждений и философской глубиной их обоснования.

Для чего нужно обоснование современной математики

Проблема обоснования математики методологически строго впервые была сформулирована Д. Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий. Новое понимание обоснования современной математики, представляющей собой совокупность абстрактных структур, сводится не только к установлению непротиворечивости ее теорий, но и к задаче обоснования надежности ее доказательных утверждений. Суть обоснования состоит в нахождении аргументов, столь же значимых для других, как и для математиков. Если бы можно было найти объективные утверждения, т. е. очевидно истинные, не подлежащие сомнению, то они могли бы стать основанием всего научного знания, начиная с математики.

В современной философской методологии познания одно из центральных мест занимает проблема плюрализма исследовательских подходов к обоснованию математического знания. Поэтому в контексте философии образования важно зафиксировать, что обоснование математических теорий – это не окончательная и законченная система, а развивающийся процесс, как и сама развивающаяся математика. Но что именно проблематизирует такое понимание обоснования математики с точки зрения ее развития на современном этапе?

Актуальность проблемы обоснования обусловлена новыми кризисами, которые произошли в современной математике во второй половине XX в. Первым явился кризис, к которому в 30-е гг. XX в. привели логические результаты К. Гёделя. Затем, начиная с 70-х гг., в современной математике произошли еще два кризиса, которые до сих пор подробно не обсуждались в философской литературе. Второй кризис относится к достоверности доказательств, проводимых с использованием современного компьютера в математическом знании: можно ли считать математическим такое доказательство, которое выполнено на компьютере? Это, в свою очередь, породило сомнение в надежной методологической обоснованности машинных способов доказательства математических теорем. Третий кризис, названный кризисом переусложненности, в определенном смысле для математиков является наиболее серьезным, так как связан с излишней сложностью доказательств математических проблем, решение которых может занимать десятки тысяч страниц математического текста. Все эти потрясения, которые испытала математика во второй половине XX в., могут принципиально изменить характер возможных путей обоснования современной математики.

Но так ли необходимо для математики ее обоснование? Можно сказать, что в общеметодологическом плане обоснование математики необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств. Следует заметить, что проблема обоснования современной математики обсуждается прежде всего с философско-методологической точки зрения, а именно в плане общих принципов математического познания. Востребованность такого подхода к обоснованию связана с тем, что, как авторитетно утверждает философ математики В. Я. Перминов, «*общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX века, с современной точки зрения, должна быть признана совершенно неудовлетворительной*» [1, с. 148].

Сегодня существенный сдвиг в решении проблемы обоснования математики зависит не от достижений в логике и анализе аксиоматических систем, а в первую очередь от углубления философии математики, от прояснения представлений о природе математического мышления и о допустимых философских подходах к обоснованию математических теорий.

Поэтому можно сформулировать следующий вопрос: какова роль философии в решении новых кризисов современной математики? Если обратиться к истории философии математики, то прямым следствием сугубо математического подхода к проблеме обоснования математики при реализации трех классических программ – логицизма, формализма и интуиционизма – было то, что, по существу, они представляли собой три различных способа редукции содержания математики к ее очевидным основам. Идея сводимости математики к логике была высказана еще Г. Лейбницем и заключалась в том, что математические утверждения представляют собой частный случай законов логики. Поэтому логицистский подход к обоснованию математики исходит из гипотетического предположения, что все понятия математики могут быть определены на основе общезначимых логических понятий. Согласно математику и логику Г. Фреге, редукция арифметики к логике означала логическое обоснование математики в целом.

Другой методологический подход в философии математики, получивший название формализма, состоял в нахождении применительно к любой отдельно взятой области математики набора аксиом и правил вывода, которые были бы достаточно полными для всех возможных в данной области корректных математических рассуждений. Программа обоснования математики Д. Гильберта заключалась в аксиоматизации математической теории с помощью содержательной метатеории и доказательстве непротиворечивости полученной системы аксиом.

Наконец, в начале XX в. усилиями математика Л. Брауэра сформировалось новое направление обоснования математики – интуиционизм. С точки зрения интуиционистской программы философского обоснования математики всякое математическое высказывание должно быть утверждением о выполнении некоторого построения, настолько ясным самим по себе, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях.

На основе анализа современной литературы по философии математики можно выявить причины неудач классических программ обоснования. Во-первых, упомянутая редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику понятий и принципов, связанных с бесконечностью, что противоречит статусу логики как системы понятий, не связанных с идеей бесконечности, а тем более с наиболее плодотворной в математике идеей актуальной бесконечности. Поэтому логицизм как направление в философии в настоящее время является малопродуктивным. Во-вторых, основная слабость формалистской программы обоснования математики состоит в незавершенности ее методологического обоснования, поскольку ограничение всей сферы надежной метатеории финитностью и арифметизируемостью не соответствует реальному развитию современных математических теорий в целом. В-третьих, негативный аспект интуиционистской программы обоснования математики заключается прежде всего в отрицании существования и полезности некоторых основных понятий и теоретико-множественных принципов современной математики.

Можно заключить, что согласно философскому определению обоснование – это способ рациональной аргументации в пользу истинности высказывания, теории или концепции. В соответствии с этим определением существуют три основных способа обоснования: доказательство, подтверждение и практическая реализация. Если говорить о практической реализации, то следует отметить укоренившуюся в математике практику собирательного употребления словосочетания «обоснование математики», которое предполагает обоснование каких-то отдельных теорий математики имеющимися методологическими средствами. Еще в античные времена Платон пришел к выводу о необходимости обоснования математического знания, которое понималось им как проблема обоснования исходных посылок математических выводов, а также правильности этих выводов. В общеметодологическом плане обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных доказательств, что стимулируется новыми кризисами, появившимися в современной математике конца XX в.

Принцип системности в обосновании и образовании

Так в чем же именно видится выход из сложившейся ситуации в обосновании современной математики? Начнем с того, что методологическая трудность обоснования современной математики, в основе которой лежит важнейшая философская проблема непротиворечивости аксиоматической системы, не позволяет выделить какую-либо одну из известных философско-математических программ обоснования. Необходимо четко ответить на вопрос: в каком смысле математические теории выступают, а не произвольно рассматриваются субъектом, как системы? Математика есть система правил, и этим объясняется ее природа, а также дается «решение» проблемы обоснования. В широком смысле систему можно определить как любую сущность, концептуальную или физическую, которая состоит из взаимозависимых частей. Системой является любой объект, на котором реализуются некоторые заданные свойства, находящиеся в определенном, заранее зафиксированном отношении. Можно предположить, что системная методология позволяет дать новую оценку ситуации обоснования, усугубленной кризисом, порожденным результатами К. Гёделя.

С системной точки зрения логическое обоснование непротиворечивости математики не нужно, поскольку математическая теория не может быть противоречивой по самой логике своего развития, так как локальная непротиворечивость отдельных математических теорий обеспечивается генетической связью математических понятий. Принцип системности представляет новую парадигму науки, благодаря которой происходит смена методологических ориентаций и в обосновании математики. В новой парадигме происходит смена методологического идеала от полноты к целостности, т. е. речь идет о переходе с помощью системной триады программ обоснования математики к целостности, как более фундаментальному понятию в философии математики, чем полнота. Так как абсолютная полнота недостижима, то от современной математики требуется прежде всего сохранять единство и целостность математического знания, опираясь на онтологическую истинность его исходных положений.

Системный подход в области обоснования математики представляет собой реализацию целостного подхода к проблеме обоснования в условиях сложнейшей дифференцированности современного математического знания, что способствует выявлению эффективных путей философско-методологического синтеза направлений обоснования и осмыслению их неизбежной и взаимной дополнительности.

Экспликацию системной триады направлений обоснования математики, объединяющую три равноправных элемента обоснования – «*формализм – платонизм – интуиционизм*» – как довольно эффективную форму философско-методологического синтеза, можно рассматривать в качестве новой методологии обоснования математики, открывающей в рамках триадической структуры дополнительные возможности анализа развития математики. Например, такой подход реализован в современном разделе постнеклассической математики – фрактальной геометрии – в виде системной триады «*дискретность – фрактальность – непрерывность*».

Системные триады характеризуются тем, что их единство создается тремя элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других, находящихся в соотношении дополнительности. Поэтому с позиций философии образования важно сделать попытку концептуально зафиксировать возможность обоснования современной математики посредством философско-методологического синтеза основных направлений обоснования как адекватной триадической модели, способной вернуть методологическую целостность философскому обоснованию современной математики.

В дополнительной аргументации, возможно, нуждается платонистская компонента в обосновании, точнее, почему в качестве третьего связующего элемента системной триады обоснования математики выбран платонизм. Необходимость платонистской компоненты в философии математики английский математик Р. Пенроуз оправдывает следующим образом: «*И все же точка зрения Платона обладает огромной научной ценностью. Прежде всего потому, что проводит четкое разделение между точными математическими объектами и теми приближениями, что мы наблюдаем в физическом мире вокруг нас*» [2, с. 34].

Корни платонизма в современной математике следует искать в XIX в., когда математики стали пользоваться актуальной бесконечностью абсолютно свободно, и актуально бесконечные множества объектов стали составлять основное содержание уже достаточно традиционной математики. Можно утверждать, что в конце XX в. произошло полное возрождение пифагорейской проблематики в философии математики, продиктованное практическими нуждами, а также платонистских взглядов на мир, построенный на математической основе.

В чем заключается философский и методологический смысл триадического подхода к обоснованию математики как новой формы философско-методологического синтеза? *Во-первых*, необходимо отметить, что мы используем синтез в смысле «*познавательной операции*», а точнее, философско-методологический синтез обосновательных подходов, основанный на системной идее интеграции программ обоснования. *Во-вторых*, триадический подход означает, что никакая часть математики не обладает особыми привилегиями, так как каждое направление обоснования современной математики основано на поисках той части математики, которая в рамках этого направления имеет особую надежность своих доказательств, свободных от противоречий. Системный подход к проблеме обоснования математики на основе единства и целостности математического знания позволил сформулировать новую концепцию обоснования [3]. В такой интерпретации все три элемента построенной системной триады потенциально равноправны, поскольку как форма философско-методологического синтеза программ обоснования она сводит различные математические теории в целостности и системы, сохраняя при этом математические основания исходных понятий и обеспечивая единство всего математического знания.

Философский смысл философско-методологического синтеза состоит в том, что не надо бороться с противоречиями программ обоснования – необходимо выявлять, упорядочивать, прогнозировать их пересечения, которые имеют онтологическое обоснование для некоторой части трансфинитной математики. Философский смысл философско-методологического синтеза также включает совокупность методов исследования как составляющую часть своего методологического арсенала, поэтому попытка такого синтеза носит предварительный характер и не может заключать в себе окончательную истину. Еще «*в пифагорейской школе философский и научный подходы были слиты, и даже открытие иррациональности, поколебавшее устои, стимулировало развитие математического языка*» [4, с. 10].

Методологический смысл философско-методологического синтеза заключается в том, что такой подход меняет структуру обоснования математики, позволяя говорить не о главенстве одной из конкурирующих программ, а об условиях их совместного существования и о третьем факторе, обеспечивающем целостность обоснования, который в рациональном аспекте может рассматриваться как признак устойчивости этой структуры; в том, что, в отличие от простого объединения принципов, представляет собой соединение исходных, даже противоположных принципов в новую концептуальную идею. Современная математизация естественнонаучного и гуманитарного знания также может рассматриваться как одна из эффективных форм реализации в неклассической и постнеклассической науке положений системного подхода.

Сущность системного подхода в обосновании математики эксплицирована через системную целостность предмета, характер взаимоотношений элементов системы обоснования и выявления роли внутренних связей в обеспечении ее целостности. Особенностью системы обоснования современной математики, отличающей ее от известных математических структур, является неполнота описания такой системы в связи с новыми методологическими кризисами переусложненности математических доказательств. С одной стороны, причиной возрастания сложности является крайняя степень абстрагирования и идеализации, ведущая к определенной рассогласованности и необозримости современной математики. С другой – философский вопрос об убедительности компьютерных доказательств соотносится с актуальным методологическим вопросом о надежности теоретических доказательств в математике.

Таким образом, новые кризисы современной математики подтверждают необходимость методологии системного подхода, основанного на реальном развитии математики, в философии образования. Такой подход к решению философской проблемы обоснования математики, безусловно, способствует и методологическому пониманию новых проблем философии математического образования. Как же связаны математическое образование и философия математики? Можно предположить, что направленность философии математики на математическое образование – это не только привилегированная, но и, пожалуй, самая верная перспектива.

Роль философии математики в философии образования

С точки зрения преподавания математики философия математики делает правильный акцент на то, что работающие математики практически не сомневаются в непротиворечивости математики – главного требования, предъявляемого к математической теории и всей математике в целом. Кроме того, если философы математики будут опираться на методологические высказывания профессиональных математиков, то это, безусловно, будет способствовать определенному взаимопониманию математиков, педагогов и философов науки по проблеме обоснования математического знания и роли такого рода исследований в педагогической практике.

Анализируя философские проблемы обоснования математики на материале становления и развития самой математики, в частности, теоретико-множественные и вычислительно-конструктивные направления, можно сделать важнейший философский вывод о том, что различные подходы к обоснованию современной математики не только равноправны, но и взаимно дополняют друг друга.

Цели математического образования в контексте «математической образованности» подвижны во времени и зависят от социокультурного окружения. Но в качестве инвариантного ядра можно выделить следующие основные цели современного математического образования, не зависящие от времени:

- формирование способности понимать смысл поставленной задачи;
- обучение умению правильно и логично рассуждать;
- практическое овладение навыками алгоритмического мышления.

Все это будет способствовать отчетливому выражению мысли в любой области знания, иначе говоря, математическая образованность в профессиональной деятельности нужна для интеллектуального развития личности. Надо чтобы математическое образование уже на уровне школы превратилось в увлекательный поиск математических закономерностей окружающего мира.

Значимость философии математики для разного уровня современного математического образования определяется тем, что практика преподавания школьной математики находится в настоящее время в системном кризисе, поскольку актуальность и фундаментальность большинства сведений формалистского направления, сообщаемых в школе, находится под вопросом.

Кризис сферы математического образования является самым опасным в мировом образовательном пространстве. Существенной характеристикой кризиса математического образования в современных условиях является то, что он носит не только количественный, но и качественный характер. Поэтому для выхода из него необходимы фундаментальные исследования по современной математике, уровней ее аргументации и понимание границ обоснованности разнообразного математического знания. Можно даже утверждать, что реальная проблема, с которой сталкивается преподавание математики, – это даже не проблема уровня строгости, а проблема выявления смысла математических понятий. Почему тогда мало что известно о системном мышлении в математическом образовании? *Во-первых*, оно использовалось главным образом для решения математических задач. *Во-вторых*, система образования всегда запаздывает, по сравнению с развитием математических теорий. Поэтому для философского осмысления кризиса общего математического образования, с точки зрения системной парадигмы необходимо проанализировать эпистемологические аспекты философии математического образования которые непосредственно связаны с онтологическими и гносеологическими проблемами философии математики, в частности, с проблемой обоснования современной математики.

Основу взаимодействия философии с конкретной наукой составляет потребность в использовании аппарата философии науки для проведения исследований в данной области, а математика, несомненно, более всего из точных наук поддается философскому анализу. Философский анализ математического знания показывает, что его идеализации были характерны для математики на стадии ее становления и связаны с особенностями философского осмысления математики Платоном.

В контексте философии математического образования следует отметить, что «*необходимость философии математики Платона как формы духовного творчества заключается в том, что мифопоэтическая вольность его произведений требует математического обоснования для философских положений, и поэтому существует установка на рационально-математическое оправдание или подведение фундамента под природную диалектику образно-художественного, теологического мышления*» [5, с. 15].

Содержание математического образования должно быть изменяемо. В такой ситуации важное практическое и теоретическое значение для конкретной разработки новой концепции математического образования имеют выявляемые в современной философии математики закономерности. Они раскрывают эвристический потенциал системного подхода в развитии математики как в рамках формалистского и интуиционистского типов мышления, так и на стадии формализации нового знания.

Системный подход в философии образования снимает напряженность между различными методологическими подходами к аргументации современных математических теорий. Кроме того, системное начало равнозначно объединяет анализ и синтез, хотя до сих пор в науке системный анализ превалирует над системным синтезом. Поэтому большое значение имеют философски выявляемые и методологически обосновываемые закономерности развития современной математики, а также концептуализации современных проблем философии математического образования. Возвращаясь к проблеме обоснования современной математики, можно рассмотреть эвристический потенциал философско-методологического синтеза обосновательных процедур для актуализации проблем математического образования. Эвристический потенциал системного подхода к обоснованию современной математики заключается в способности к репрезентации новых научных представлений и образовательно-методологических концепций математики. Такой эпистемологический поворот характерен не только по отношению к программе обоснования, но и к философии математического образования в целом.

Список литературы

1. *Перминов, В. Я.* Философия и основания математики / В. Я. Перминов. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.
2. *Пенроуз, Р.* Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель / Р. Пенроуз. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2007. – 912 с.
3. *Михайлова, Н. В.* Философско-методологический анализ проблемы обоснования современной математики: монография / Н. В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2013. – 552 с.
4. *Ловецкий, Г. И.* Кризис образования в контексте истории философии и математики / Г. И. Ловецкий // Философия и математика: высшие идеи и числа в Древнем мире и античности / Г. И. Ловецкий. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – С. 3–12.
5. *Панфилов, В. А.* Философские проблемы математики в учении Платона как основа метафизики гуманитарного знания и духовного творчества / В. А. Панфилов // Вестник Днепропетровского университета. Серия «История и философия науки и техники». – 2009. – Вып. 17, № 1/2. – С. 3–18.